LVI Olimpiada Matemática Española

Fase Cero, León-Ponferrada

Viernes 15 de noviembre de 2019

- Las primeras 12 preguntas son de tipo test, cada una con cinco posibles respuestas A, B, C, D, E, una sola de las cuales es correcta. En estas preguntas, cada respuesta contestada correctamente vale 5 puntos, cada respuesta incorrecta vale 0 puntos, y cada pregunta que se deje sin contestar vale 1 punto.
- Las preguntas 13 a 16 son de respuesta numérica corta: la solución es un número real escrito en cualquier formato válido, por ejemplo $0, 2, -5, \frac{3}{5}, 10!, 2 \cdot 10^{-2020}, -1.4142, \frac{\pi\sqrt{3}}{10}, \ldots$ En estas preguntas cada respuesta correcta vale 10 puntos, y las respuestas incorrectas y preguntas sin contestar valen 0 puntos.
- Al finalizar la prueba y antes de entregar esta hoja, copia en la tabla de respuestas (sin tachar ni borrar) las opciones $A \ldots E$ elegidas para cada pregunta 1 a 12, y las soluciones numéricas para las preguntas 13 a 16, dejando en blanco las casillas correspondientes a las preguntas no contestadas.
- Tiempo disponible: dos horas y media.
- No está permitido el uso de teléfonos móviles, calculadoras ni cualquier otro tipo de dispositivo electrónico.

Nombre y apellidos: ....

Colegio/Instituto: ....

TABLA DE RESPUESTAS:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

13	14	15	16

1. ¿Cuál de las siguientes fracciones es la menor?

$$(A)\ \frac{2017}{2016} \qquad (B)\ \frac{2018}{2017} \qquad (C)\ \frac{2019}{2018} \qquad (D)\ \frac{2020}{2019} \qquad (E)\ \frac{2021}{2020}$$

2. En el país olímpico circulan cuatro tipos de monedas: las aritméticas, las algebraicas, las combinatorias y las geométricas. Una moneda aritmética vale una algebraica más una combinatoria más una geométrica. Dos monedas aritméticas valen tanto como una algebraica más tres combinatorias más cinco geométricas. Si un olímpico entra en una tienda con una moneda algebraica y sale con una combinatoria, ¿cuánto ha pagado en monedas geométricas?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

3. Si n es un entero impar y cuadrado perfecto, el siguiente número con todas estas propiedades es siempre:

(A) $(2n+1)^2$ (B) $(n+2)^2$ (C) $n+2$ (D) $n+4\sqrt{n}+4$ (E) $n+2\sqrt{n}+1$

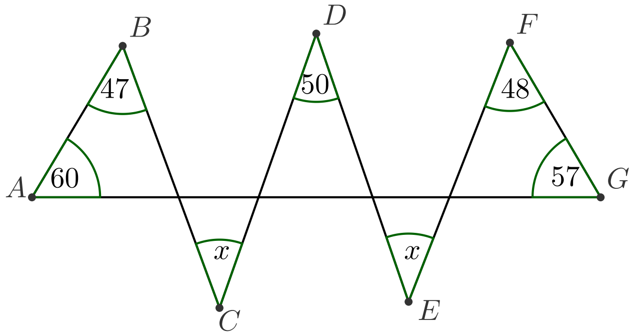
4. En una isla existen dos clases de habitantes: caballeros, que siempre dicen la verdad, y villanos, que siempre mienten. Te encuentras con dos personas A y B de la isla. A dice "Yo soy un villano o B es un caballero" y B no dice nada. A partir de estos datos puedes deducir que:

(A) A y B son ambos caballeros (B) A es caballero y B es villano
(C) A es villano y B es caballero (D) A y B son ambos villanos
(E) A es villano, y B puede ser caballero o villano.

5. Carla construye un cubo de lado 10 ($10 \times 10 \times 10$) con 1000 cubitos de lado 1 ($1 \times 1 \times 1$), y pinta de rojo la parte visible de las seis caras del cubo grande que ha construido. ¿Cuántos de los 1000 cubitos iniciales tienen exactamente dos de sus caras pintadas de rojo?

(A) 60 (B) 90 (C) 96 (D) 104 (E) 120

6. En la figura a continuación se conocen las medidas (en grados) de algunos ángulos y se sabe que los ángulos en los vértices C y E tienen el mismo valor x. Hallar x.



(A) 37° (B) 38° (C) 39° (D) 40° (E) 41°

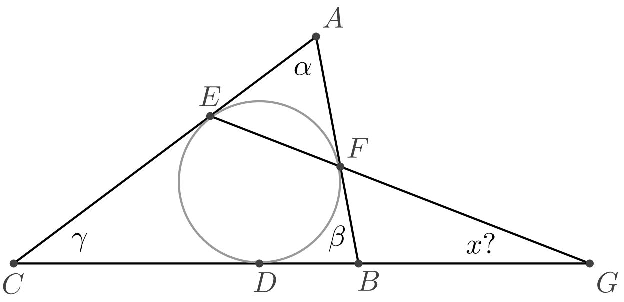
7. Tres chicas y un chico desean sentarse en una mesa circular con cinco sillas numeradas del 1 al 5. Para decidir los sitios se recortan 5 papeles, cada uno con un número del 1 al 5, se mezclan y se reparten al azar, de manera que cada persona recibe un papel con un número de silla, y quedará un papel sin entregar. ¿Cuál es la probabilidad de que la silla que queda vacía se encuentre entre dos chicas?

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$

8. Si un teléfono móvil tiene la batería completamente descargada, esta debe estar enchufada durante dos horas para recargarse totalmente, si durante ese tiempo no se usa. Si se utilza el móvil durante la recarga, la mitad de la energía recibida se consume en el uso y la otra mitad se almacena en la batería. Sabiendo que la recarga de la batería ha durado dos horas y media, ¿cuántos minutos ha sido utilizado el teléfono?

(A) 54 (B) 60 (C) 70 (D) 72 (E) 75

9. ¿Cuánto vale el ángulo x ($\angle FGB$) en función de α, β y γ? Debe contestarse una opción que sea verdadera con total seguridad, en todos los casos en que esta figura es posible.



(A) $\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$
(B) $\frac{\beta}{2} - \gamma$
(C) $\beta - \frac{\gamma}{2}$
(D) $\beta - \gamma$
(E) $45° - \frac{\alpha}{2}$

10. Mario escribe los números enteros positivos en una tabla con 7 columnas, como se muestra en la figura.
Como le tiene manía al número 11, lo excluye de la tabla, junto con todos sus múltiplos. Indicamos con (m, n) la casilla que se encuentra en la fila número n (contando desde arriba) y en la columna número m (empezando por la izquierda): por ejemplo, la casilla $(2, 4)$ contiene el número 12.
¿En qué casilla estará contenido el número 1500?

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	23
24	25	…	…	…	…	…
…	…					

(A) $(193, 6)$ (B) $(194, 3)$ (C) $(195, 6)$ (D) $(214, 2)$ (E) $(215, 2)$

11. Una araña tiene 8 pies, 8 zapatos distintos y 8 calcetines distintos. Determinar el número de maneras en las que puede ponerse los 8 calcetines y los 8 zapatos (teniendo en consideración el orden en que se los pone) con la condición de que antes de ponerse un zapato tiene que tener ya un calcetín en ese pie.

(A) $8!8!2^8$ (B) $8!8!8!$ (C) $\dfrac{8!8!}{2^8}$ (D) $\dfrac{16!8!8!}{2^8}$ (E) $\dfrac{16!}{8!8!}$

Nota: el factorial de un número natural n se escribe $n!$ y es igual a $1 \times 2 \times \cdots \times n$.

12. Clara ha colocado 8 monedas en una fila, algunas mostrando la cara (C), otras la cruz (X), en esta secuencia: $CCCCCXXX$. Se desarrolla el siguiente juego: en cada movimiento se eligen dos monedas consecutivas y se les da la vuelta a ambas. Determinar el mínimo número de movimientos necesarios para obtener la secuencia $XXXXXXCC$.

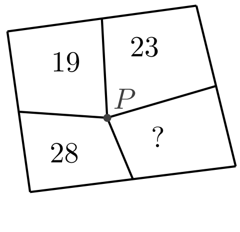
(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) un número par (E) no es posible conseguir el objetivo

---

13. César tiene muchos soldaditos, una cantidad entre 2000 y 2500. Al intentar distribuirlos en filas de 2, de 3, de 4, 5, 6, 7, observa que en cada caso sobra uno. Para conseguir colocar los soldaditos en varias filas, cada una de la misma longitud x (mayor que 1), ¿cuál deberá ser como mínimo el valor de esa longitud x?

14. Sea x un número real positivo que satisface la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$. Si a, b son enteros tales que $x^{10} = ax + b$, determinar el valor de $a + b$.

15. Se tiene un cuadrilátero convexo.
Desde un punto P interior se trazan los 4 segmentos que lo unen con los puntos medios de los lados, quedando la figura divida en 4 regiones. Si tres de estas cuatro regiones tienen áreas conocidas (indicadas en la figura), hallar el área de la cuarta región.



16. Micaela dibuja una tabla rectangular de dimensiones 2×100 y quiere colocar dentro 99 monedas iguales, cada una en una casilla de la tabla, de manera que no existan dos monedas ocupando casillas contiguas (se consideran contiguas o vecinas las casillas que tienen un lado común). Determinar de cuántas maneras distintas puede Micaela colocar las monedas.

SOLUCIONES:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
E	C	D	A	C	E	B	B	A	C	D	E

13	14	15	16
11	89	32	396

Origen de los problemas: las preguntas 1, 2, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 15 y 16 fueron extraidas de los Giochi di Archimede (`http://olimpiadi.dm.unibo.it/`); las restantes preguntas son de elaboración propia y/o adaptaciones de problemas publicados en libros.

Breve explicación de las soluciones

1. Las fracciones $\frac{n+1}{n}$, con n positivo, son $1+\frac{1}{n}$, por lo que la menor será aquella que tenga el mayor valor de n. Respuesta correcta (E).

2. Sea x, a, c, g los valores de una moneda aritmética, algebraica, combinatoria y geométrica, respectivamente. Los datos del enunciado permiten afirmar que $x = a + c + g, 2x = a + 3c + 5g$. Restando a la segunda ecuación dos veces la primera obtenemos $0 = -a + c + 3g$, o sea $a - c = 3g$. Por lo tanto la diferencia entre una moneda algebraica y una combinatoria son 3 geométricas, la respuesta correcta es (C).

3. Si n es un cuadrado perfecto impar, su raíz cuadrada $\sqrt{n}$ es un entero impar, y el siguiente impar es $\sqrt{n}+2$, cuyo cuadrado es $(\sqrt{n}+2)^2 = n + 4\sqrt{n} + 4$, opción (D).

   Nota: es verdad que cuando $n = 1^2$, el siguiente número válido 3^2 puede obtenerse por cualquiera de las fórmulas $(n+2)^2$, $(2n+1)^2$ o $(2+\sqrt{n})^2$, pero ni la primera ni la segunda fórmula son "universalmente válidas", ya que funcionan a veces sí y a veces no. Dado que en este grupo de preguntas se admite solamente una respuesta verdadera, esta deber ser (D).

4. A no puede ser un villano porque en ese caso sería verdadera la frase que dice. Ahora sabiendo que A es un caballero, lo que dice es verdad, pero la primera parte del "o lógico" es falsa, por lo que debe ser verdadera la segunda: "B es un caballero". Por lo tanto deducimos que A y B son ambos caballeros, opción (A).

5. Los cubitos que resultan tener dos de sus caras pintadas de rojo son todos los que forman parte de una arista del cubo grande, sin ser ninguno de los vértices. El cubo grande tiene 12 aristas. Cada arista tiene 10 cubitos, pero los dos extremos son esquinas del cubo grande y deben descartarse, quedando entonces 8 cubitos con dos caras rojas, en cada una de las 12 aristas. La solución es $12 \times 8 = 96$, opción (C).

6. Llamamos P, Q, R, S a los cuatro puntos de la recta AG que no tienen nombre en la figura del enunciado. Sabiendo que los ángulos de un triángulo suman 180^o y razonando con los triángulos ABP y CPQ tenemos que $A + B = C + Q \Rightarrow Q = 60^o + 47^o - x = 107^o - x$.

   Análogamente, $F + G = E + R$ implica que $R = 105^o - x$.

   Finalmente, razonando en el triángulo DQR tenemos que

   $$50^o + (107^o - x) + (105^o - x) = 180^o \Rightarrow 262 - 2x = 180^o \Rightarrow x = 41^o.$$

   La respuesta correcta es (E).

7. Una vez fijada la posición de la silla vacía, el chico tiene 4 lugares posibles para sentarse, en 2 de los cuales queda a un lado de la silla vacía, y en 2 no. La probabilidad pedida es $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, opción (B).

8. Supongamos que el teléfono estuvo x minutos en uso y $150 - x$ minutos sin usar. Por cada uno de los minutos no hablados, la batería se carga una fracción $\frac{1}{120}$ del total. Por otra parte, por cada minuto hablado la fracción de carga es $\frac{1}{240}$. Planteamos la ecuación

$$1 = (150 - x)\frac{1}{120} + x\frac{1}{240},$$

de donde se obtiene $x = 60$, opción (B).

9. Los dos segmentos tangentes a una circunferencia desde un punto tienen la misma longitud, por lo que en esta figura tenemos que $AE = AF$. El triángulo AEF es isósceles con un ángulo α y los otros dos iguales a $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$, para que la suma de los tres sea 180^o. A continuación igualamos a 180^o la suma de los ángulos del triángulo BFG:

$$(180^o - \beta) + (\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}) + x = 180^o,$$

obteniendo que x vale $\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$, la respuesta correcta es (A).

10. Dado que $\frac{1500}{11}$ está entre 136 y 137, hay 136 múltiplos de 11 que fueron eliminados de la tabla de Mario, por lo que al llegar al número 1500, se han ocupado $1500 - 136 = 1364$ casillas. La división de 1364 entre 7 da cociente 194 y resto 6. Quiere decir que se han completado 194 filas, y el 1500 se encuentra en la sexta casilla de la fila 195. La respuesta correcta es (C).

11. Dividimos el experimento en varias etapas.

    1) Si llamamos A, B, C, D, E, F, G, H a los 8 pies de la araña, formamos todas las secuencias de letras donde cada letra aparece repetida dos veces, esto puede hacerse de $\frac{16!}{2^8}$ maneras posibles.

    2) En la primera aparición de cada letra, la araña debe colocar los 8 calcetines an algún orden, esto puede hacerse de 8! maneras posibles.

    3) Queda por rellenar los segundos elementos de cada pareja de letras con los 8 zapatos, tarea que puede realizarse de 8! formas posibles.

    Multiplicando las maneras posibles de resolver cada etapa obtenemos como solución $\dfrac{16!8!8!}{2^8}$, que es la opción (D).

12. Cada vez que Clara da la vuelta a dos monedas, pasa de la secuencia CX a XC, o de XC a CX, o de CC a XX o de XX a CC. El número de caras se mantiene igual, o aumenta en 2 unidades o disminuye en 2, pero en todos los casos se preserva la paridad del número de caras (y también del de cruces). Ahora bien, la secuencia inicial tiene 5 caras (impar) y la secuencia que se pretende alcanzar tiene 2 caras (par). Es imposible pasar de una secuencia a la otra, la respuesta es (E).

---

13. Sea n el número de soldaditos de César. Como n da resto 1 al ser dividido por cada uno de los números $2, 3, 4, 5, 6, 7$, también dará resto 1 al dividirlo entre su mínimo común múltiplo, que es $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$. El único número entre 2000 y 2500 que deja resto 1 al dividir entre 420 es $5 \times 420 + 1 = 2101$, este es el valor de n.

    La longitud x buscada por César debe ser un divisor de n, y debe ser el menor de los divisores mayores que 1. Vemos que 2101 es divisible entre 11 (pues 2+0=1+1), y ningún número menor que 11 y mayor que 1 es divisor de n. La respuesta es 11.

14. Multiplicando la ecuación $x^2 = x + 1$ por sucesivas potencias de x tenemos que

$$x \cdot x^2 = x(x^2+1), \quad x^2 \cdot x^2 = x^2(x+1), \quad x^3 \cdot x^2 = x^3(x^2+1), \ldots$$

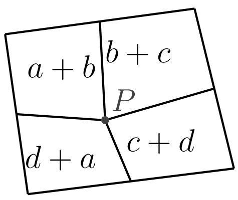
es decir $x^3 = x^2 + x$, $x^4 = x^3 + x^2$, $x^5 = x^4 + x^3$, etc. Cada potencia de x es igual a la suma de las dos anteriores. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
&x^2 = x + 1,\\
&x^3 = x^2 + x = (x+1) + x = 2x + 1,\\
&x^4 = x^3 + x^2 = (2x+1) + (x+1) = 3x + 2,\\
&x^5 = x^4 + x^3 = (3x+2) + (2x+1) = 5x + 3,\\
&x^6 = x^5 + x^4 = (5x+3) + (3x+2) = 8x + 5,\\
&x^7 = x^6 + x^5 = (8x+5) + (5x+3) = 13x + 8,\\
&x^8 = x^7 + x^6 = (13x+8) + (8x+5) = 21x + 13,\\
&x^9 = x^8 + x^7 = (21x+13) + (13x+8) = 34x + 21,\\
&x^{10} = x^9 + x^8 = (34x+21) + (21x+13) = 55x + 34,
\end{aligned}$$

por lo que $a = 55$, $b = 34$ y la suma buscada es $a + b = 89$.

Nótese que los números que aparecen $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ son todos términos de la sucesión de Fibonacci.

15. Sean A, B dos vértices consecutivos del cuadrilátero, y sea M su punto medio. Observar que los triángulos PAM y PBM tienen igual área por tener bases iguales y la misma altura. Repitiendo este razonamiento en todos los lados, el cuadrilátero queda dividido en 8 regiones: dos de igual área que llamamos a, dos de área b, dos de área c y dos de área d.



El problema queda transformado en la siguiente cuestión:

sabiendo que $a + b = 19$, $b + c = 23$ y $d + a = 28$, ¿cuánto vale $c + d$?

La solución es

$$c + d = (b + c) + (d + a) - (a + b) = 23 + 28 - 19 = 32.$$

16. Tenemos 99 columnas y no puede haber más de una moneda por columna, por lo tanto una columna quedará libre. Dependiendo de cuál sea la columna libre, habrá más o menos formas de colocar las monedas, y sumando todos los resultados parciales se tendrá el resultado total.

Si la columna libre es la primera, hay 2 maneras de rellenar las restantes columnas: la primera fila 101010.... y la segunda fila 010101...., o bien la primera fila 010101.... y la segunda fila 101010.... (1 significa casilla ocupada por moneda, y 0 casilla libre).

El mismo razonamiento prueba que hay 2 maneras de colocar las monedas si la columna libre es la última.

Si la columna libre es una de las intermedias 2,3,...,99, habrá dos regiones para rellenar, una a la izquierda y otra a la derecha de la columna libre. Como cada una de estas regiones se puede rellenar de dos formas distintas, hay $2 \times 2 = 4$ formas de rellenar el tablero.

Resumiendo, tenemos 2 casos con 2 soluciones cada uno, y $100 - 2 = 98$ casos con 4 soluciones cada uno. El número buscado es entonces $2 \cdot 2 + 4 \cdot 98 = 396$.