LV Olimpiada Matemática Española

Fase Cero, León-Ponferrada

Viernes 23 de noviembre de 2018

- La prueba dura dos horas y media y consta de dos partes.
- La primera parte consiste en 12 preguntas, cada una con 5 opciones posibles (A, B, C, D, E), una sola de las cuales es correcta. Cada respuesta correcta vale 5 puntos, cada respuesta incorrecta vale 0 puntos, y cada pregunta que se deje sin contestar vale 1 punto.
- En la segunda parte hay 4 preguntas de respuesta numérica (el resultado es un número real: 0, -5, π, -3.73, $\frac{1}{4}$, $\frac{\sqrt[4]{2018}}{7}$, etc.). Cada respuesta correcta vale 10 puntos, y las respuestas incorrectas o dejadas en blanco valen 0 puntos.
- Al finalizar la prueba y antes de entregar esta hoja, copia en la tabla (sin tachar ni borrar) las opciones elegidas para las preguntas 1 a 12 (A, B, C, D, E o dejar en blanco), y la solución numérica en las preguntas 13 a 16.
- No está permitido el uso de instrumentos de medida o dibujo, teléfonos móviles, calculadora o cualquier otro tipo de dispositivo electrónico.

Nombre y apellidos: ....

Colegio/Instituto: .... Curso: ....

Respuestas primera parte:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Respuestas segunda parte:

13	14	15	16

LV Olimpiada Matemática Española

Fase Cero, León-Ponferrada

Viernes 23 de noviembre de 2018

Primera parte

1. Un producto ha aumentado su precio en un 60%, y luego se ha reducido en una cantidad porcentual X, volviendo a su precio inicial. ¿Cuánto vale X?

   (A) 15%   (B) 21.5%   (C) 28%   (D) 37.5%   (E) 60%

---

2. ¿Cuál de estas secuencias de desigualdades es correcta?

   (A) $2\sqrt{2} < \sqrt{10} < \sqrt{3} + \sqrt{5}$ (B) $\sqrt{3} + \sqrt{5} < 2\sqrt{2} < \sqrt{10}$ (C) $2\sqrt{2} < \sqrt{3} + \sqrt{5} < \sqrt{10}$
   (D) $\sqrt{10} < 2\sqrt{2} < \sqrt{3} + \sqrt{5}$ (E) $\sqrt{3} + \sqrt{5} < \sqrt{10} < 2\sqrt{2}$

---

3. De los números reales a, b, c, lo único que se sabe es que si se seleccionan dos cualesquiera de ellos, la suma siempre es mayor o igual que cero. ¿Cuál de estas afirmaciones es verdadera con total seguridad?

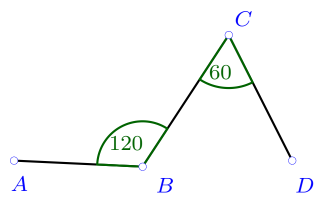
   (A) $abc \geq 0$ (B) Al menos uno de los tres es cero   (C) Al menos uno de los tres es estrictamente menor que 0   (D) a, b, c son todos ≥ 0 (E) $a + b + c \geq 0$.

---

4. .

   En la figura adjunta (el dibujo no está a escala), se conocen las distancias $AB = BC = CD = 100$ y los ángulos $C\widehat{B}A = 120^0$ y $B\widehat{C}D = 60^0$. ¿Cuál es la distancia de A a D en línea recta?

   (A) 100   (B) $100\sqrt{3}$ (C) 200   (D) 330   (E) $200\sqrt{3}$



---

5. ¿Cuántos números naturales de 4 cifras hay tales que la cifra de las unidades sea igual a la suma de la cifra de las decenas y la cifra de las centenas?

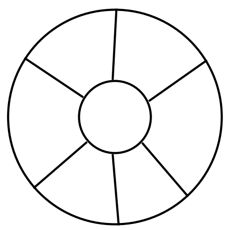
   (A) 315   (B) 495   (C) 540   (D) 720   (E) 900

---

6. .

   Conchi se imagina un mundo plano y redondo y lo divide en 7 países, como en la figura adjunta. Quiere colorearlos de rojo, verde y amarillo (cada país de un color) de manera que dos países vecinos siempre tengan colores distintos. ¿De cuántas formas es posible colorear el mundo de Conchi?

   (A) 0   (B) 2   (C) 4   (D) 5   (E) 6



---

7. ¿Cuántas parejas (x, y) de números enteros estrictamente mayores que 1 satisfacen $x^2 + y = xy + 1$?

   (A) 0   (B) 1   (C) 2   (D) 3   (E) Más de 4.

---

8. ¿Para cuántos valores del número natural n se cumple que la ecuación $3x^2 + 2nx + 3 = 0$ tiene dos soluciones enteras y distintas?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) Más de 5.

---

9. ¿Cuántos enteros positivos m hay tales que $m^2 + 2018$ es un cuadrado perfecto?

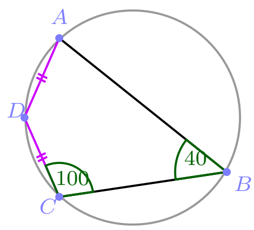
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

---

10. .

En la figura adjunta (el dibujo no está a escala) se sabe que A, B, C, D están en una circunferencia, $AD = DC$, $A\widehat{B}C = 40^o$ y $B\widehat{C}D = 100^0$. Comparar los segmentos AB y BD ...

(A) $AB < BD$ (B) $AB = BD$ (C) $AB > BD$
(D) Depende de la figura, puede ser $AB < BD$ o $AB = BD$.
(E) Depende de la figura, puede ser $AB = BD$ o $AB > BD$.



---

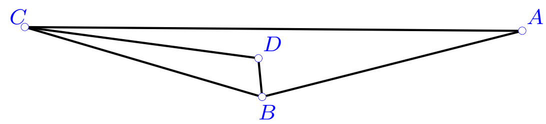
11. El mago Merlín tiene inicialmente 7 bolas blancas y 7 negras, y puede hacer dos tipos de hechizos. El primero hace desaparecer 3 bolas negras y en su lugar aparecen 2 blancas (este encantamiento sólo puede realizarse si hay al menos 3 bolas negras). El segundo hechizo hace que desaparezcan 4 bolas blancas y aparezcan 9 negras (se puede efectuar solamente si hay al menos 4 blancas). Después de lanzar varias veces estos hechizos, ¿cuántas bolas blancas y negras puede tener Merlín?

(A) 2 blancas y 15 negras (B) 4 blancas y 14 negras (C) 3 blancas y 11 negras
(D) 7 blancas y 13 negras (E) 10 blancas y 10 negras

---

12. .

En la figura adjunta (el dibujo no está a escala) se sabe que el punto D está en el interior del triángulo ABC y se tiene que $A\widehat{B}D = D\widehat{B}C$ y $B\widehat{C}D = D\widehat{C}A$. Comparar los segmentos AB y AD...



(A) $AB < AD$ (B) $AB = AD$ (C) $AB > AD$
(D) Depende de la figura, puede ser $AB < AD$ o $AB = AD$.
(E) Depende de la figura, puede ser $AB = AD$ o $AB > AD$.

Segunda Parte

---

13. Arwen juega con su calculadora. Introduce un número entero positivo, obtiene su raíz cuadrada, y si el resultado no es entero lo redondea hacia el entero inmediatamente inferior. Al repetir este proceso tres veces, ha obtenido por primera vez el número 1. ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor número por el cual puede haber empezado Arwen el juego?

---

14. Hay ocho enteros positivos en una fila. Desde el tercero en adelante, cada uno es la suma de los dos números precedentes. Si el octavo número es 2018, ¿cuál es el mayor valor posible del primero?

---

15. ABC es un triángulo equilátero de lado 3. Se consideran puntos D, E, F sobre los lados BC, CA, AB respectivamente, tales que $CD = BF = 1$ y $DE \perp BC$. Hallar el área del triángulo DEF.

---

16. Determinar las dos últimas cifras del número 2019^{2019}.

Respuestas correctas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
D	A	E	C	B	E	E	A	A	B	D	C	239	249	$\frac{3}{4}\sqrt{3}$ ≈ 1.299	79

Soluciones.-

1. Si el precio original es x, tras el aumento valdrá $1.6x$, y para volver a x debe descender $0.6x$, lo que supone una fracción de $\frac{0.6x}{1.6x} = \frac{3}{8}$, o sea 37.5%. Respuesta correcta (D).

2. La respuesta correcta es (A). En efecto, $2\sqrt{2} = \sqrt{8} < \sqrt{10}$, y $\sqrt{3} + \sqrt{5} > \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} = \sqrt{12} > \sqrt{10}$.

3. Lo que se sabe de los números es que $a + b \geq 0$, $b + c \geq 0$ y $c + a \geq 0$. Sumando las tres desigualdades y diviendo entre 2 se obtiene $a + b + c \geq 0$, la opción (E) es verdadera.

   Si por curiosidad deseamos confirmar que no hay más respuestas correctas... Eligiendo los números $(-1, 2, 2)$ vemos que se cumplen las hipótesis del problema pero no son ciertas ni (A), ni (B) ni (D). Por otra parte, si elegimos $(1, 1, 1)$, no es cierta (C). En consecuencia, la única opción verdadera con total seguridad es (E).

4. El triángulo BCD debe ser equilátero pues es isósceles ($BC = CD$) y tiene un ángulo de 60^0, por lo tanto tenemos que $BD = 100$. Además $\angle DBC = 60^0$, lo que prueba que A, B, D están alineados, y entonces $AD = AB + BD = 100 + 100 = 200$. Respuesta correcta (C).

5. Si $abcd$ es la representación decimal del número, debe cumplirse $d = b + c$. Para cada valor de b, será válido cualquier valor de $c \geq 0$ que haga que $b+c$ sea ≤ 9. Así, cuando $b = 0$ hay 10 valores posibles para c (0,1,...,9); si $b = 1$ hay 9 valores posibles para c (0,1,...,8); y así sucesivamente hasta $b = 9$, que permite un único valor de c (el 0). Las opciones para b, c son entonces $10 + 9 + \cdots + 2 + 1$, o sea 55, y este número debe multiplicarse por 9, que son las formas de elegir a entre $\{1, \ldots, 9\}$ para que el número resultante sea de 4 cifras. Puesto que $55 \times 9 = 495$, la respuesta es (B).

6. El color del país central puede elegirse de 3 maneras distintas. Una vez pintado el centro, su color ya no puede utilizarse más. Los restantes 6 países deben colorearse de forma alternada utilizando los dos colores que quedan sin usar, esto puede hacerse de 2 formas distintas. La solución es $3 \times 2 = 6$, respuesta correcta (E).

7. Reescribimos $x^2 + y = xy + 1$ en la forma $x^2 - 1 = xy - y$ o sea $(x - 1)(x + 1) = (x - 1)y$. Esta ecuación tiene infinitas soluciones: para cada $n > 1$ entero, la pareja $(x = n, y = n + 1)$ es una posible solución. La respuesta correcta es (E).

8. Las relaciones entre coeficientes y raíces de un polinomio aseguran que en la ecuación $3x^2 + 2nx + 3 = 0$ el producto de raíces vale $\frac{3}{3} = 1$, es decir, una raíz es inversa de la otra. En consecuencia, si una es entera, la otra no lo es, excepto en los casos de raíz doble 1 o -1, pero en esos casos las raíces no son distintas. Por lo tanto, no hay ningún valor de n que proporcione dos raíces enteras y distintas. La respuesta correcta es (A).

9. Razonando módulo 4, sabemos que $m^2 \equiv 0$ si m es par y $m^2 \equiv 1$ si m es impar. Dado que $2018 \equiv 2 \pmod 4$, se tiene que $m^2 + 2018$ es congruente con 2 o 3 módulo 4, nunca puede ser un cuadrado perfecto. Respuesta correcta (A).

   Otra solución: si escribimos $m^2 + 2018 = k^2$, vemos que $k^2 - m^2 = 2018$. Esta ecuación no tiene soluciones enteras, ya que $k^2 - m^2 = (k - m)(k + m)$ es el producto de dos números de la misma paridad. Sin embargo, 2018 solamente puede factorizarse como $1 \cdot 2018$ o bien $2 \cdot 1009$, con un factor par y el otro impar.

10. En un cuadrilátero cíclico (inscriptible en una circunferencia) la suma de ángulos opuestos es 180^o, por lo que tenemos que $\angle CDA = 140^o$ y $\angle DAB = 80^o$. Por otra parte, el triángulo isósceles ADC se completa con $\angle DAC = \angle ACD = 20^o$. Además, igualando ángulos que abarcan el mismo arco deducimos que $\angle ABD = \angle ACD = 20^o$. El triángulo ABD tiene un ángulo 80^o y otro 20^o, por tanto el tercer ángulo es 80^o, se trata de un triángulo isósceles con ángulos iguales en D y A. Los lados opuestos a esos vértices deben ser iguales, $AB = BD$. Respuesta correcta (B).

11. Nótese que los hechizos provocan que la cantidad de bolas blancas aumente en 2 o disminuya en 4, su paridad no cambia, debe ser siempre impar, ya que el 7 es impar. Eso descarta las opciones (A), (B) y (E). Por otra parte, cada hechizo modifica la cantidad de bolas negras en un múltiplo de 3. Como 15, 14 y 11 no pueden alcanzarse a partir del 7 sumando o restando múltiplos de 3, debemos desechar las opciones (A), (B) y (C). La única opción no descartada es (D). A esta configuración puede llegarse aplicando la secuencia de hechizos 1, 1, 2, 1, 1, 2. Respuesta correcta (D).

12. Observar que D es intersección de las bisectrices de B y C en el triángulo ABC, entonces D es el incentro de ABC, y la bisectriz de A también pasa por D. Si denotamos los ángulos de ABC como α, β y γ, vemos que el triángulo ABD tiene ángulos $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ y $90^o + \frac{\gamma}{2}$ en los vértices A, B y D respectivamente. El triángulo ABD es obtusángulo en D, luego el lado mayor es el opuesto al vértice D, y se tiene $AB > AD$, respuesta correcta (C).

---

13. La respuesta es 239, obtenida como la diferencia entre 255 y 16. Primero veamos que los números iniciales 255 y 16 permiten llegar al 1 en 3 pasos. En efecto, $255 \to 15 \to 3 \to 1$ y $16 \to 4 \to 2 \to 1$.

    Ahora veremos que cualquier número inicial mayor que 255 o menor que 16 incumple las condiciones del enunciado. Llamamos a_i al número obtenido en el paso i. Si $a_0 \geq 256$, entonces $a_1 \geq 16$, $a_2 \geq 4$ y $a_3 \geq 2$, no puede ser 1. Si $a_0 \leq 15$, entonces $a_1 \leq 3$ y $a_2 = 1$, se alcanza el 1 antes del tercer paso.

---

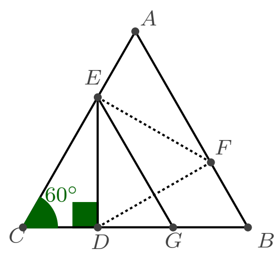
14. Si a, b son los dos primeros números, la secuencia completa de los 8 números es:

$$a \quad b \quad a+b \quad a+2b \quad 2a+3b \quad 3a+5b \quad 5a+8b \quad 8a+13b$$

    De la relación $8a + 13b = 2018$ obtenemos $a = \frac{2018-13b}{8}$, que será máximo cuando b es mínimo. El menor valor posible para b es 1, pero se descarta porque $8a + 13 \cdot 1$ es un número impar para todo a, nunca puede ser 2018. Si $b = 2$, la ecuación $8a + 13 \cdot 2 = 2018$ tiene solución entera $a = 249$, y esta es la respuesta correcta.

---

15. La observación clave es que $CE = 2$ y $EA = 1$.



    En efecto, si G es el punto medio de BD ($DG = GB = 1$), se tiene que G y C son simétricos respecto a D, y el triángulo CEG debe ser equilátero. Por lo tanto $CE = 2$ y $EA = 1$. Dado que $DE \perp BC$, tras sucesivos giros de 60^o se deduce que $EF \perp CA$ y $DF \perp AB$. En consecuencia, DEF es un triángulo equilátero. Es conocido que el área de un equilátero de lado a es $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, lo cual para el triángulo DEF nos da un área de

$$\frac{DE^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(CE^2 - CD^2)\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.299$$

---

16. Basta calcular las dos últimas cifras de 19^{2019}. Dado que $19^2 = 361$, acabado en 61, cada dos factores 19 los sustituimos por un 61, es decir, debemos investigar las dos últimas cifras de $19 \cdot 61^{1009}$. Veamos las terminaciones de las primeras potencias de 61.

    $61^2 = 3721$, acaba en 21;

    $61^3 = 61 \cdot 61^2$, tiene la misma terminación que $61 \cdot 21 = 1281$, o sea 81;

    $61^4 = 61 \cdot 61^3$, tiene la misma terminación que $61 \cdot 81 = 4941$, o sea 41;

    $61^5 = 61 \cdot 61^4$, tiene la misma terminación que $61 \cdot 41 = 2501$, o sea 01.

    Es decir, cada 5 factores 61 los sustituimos por un factor 1. En consecuencia, los 1009 factores 61 se reemplazan por 201 factores 1 y 4 factores 61, con terminación 41, y eso se multiplica por 19, obteniendo 779. La respuesta es 79.

    Existen varias posibles soluciones a este problema utilizando resultados más avanzados (aritmética modular, teorema de Euler-Fermat, teorema chino del resto, orden de un elemento, etc.), pero para una prueba de este nivel el enfoque por fuerza bruta es aceptable.