XLVIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes tarde, 16 de diciembre de 2011

1. Sean a, b y c tres números reales positivos cuyo producto es 1. Demostrar que si la suma de estos números es mayor que la suma de sus recíprocos, entonces exactamente uno de ellos es mayor que 1.

2. Dos amigos A y B juegan por turnos de la siguiente manera. En el turno 1, A escribe 1 o 2 en la pizarra; en el turno 2, B escribe 2 o 3; en el turno 3, A escribe 3 o 4, y así sucesivamente hasta el turno 2011, tras el cual finaliza el juego. A gana si la suma de todos los números escritos es múltiplo de 3, en cualquier otro caso gana B. Determinar cuál de los dos jugadores tiene una estrategia que le permita ganar siempre.

3. Sea ABC un triángulo no isósceles, rectángulo en A. Los puntos D, E, F están sobre los lados BC, CA, AB respectivamente, de forma que $AFDE$ es un cuadrado. Las rectas BC y EF se cortan en G. Demostrar que la recta AG es tangente a la circunferencia de diámetro BC.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

XLVIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado mañana, 17 de diciembre de 2011

4. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y P un punto interior. Determinar qué condiciones deben cumplir el cuadrilátero y el punto P para que los cuatro triángulos PAB, PBC, PCD y PDA tengan la misma área.

5. Sea f una función definida sobre el conjunto de los enteros positivos verificando $f(1) = 1$, y para todo $n \geq 1$:

$$f(2n) = f(n) - 1, \; f(2n+1) = f(n) + 1$$

Determinar la suma $f(1) + f(2) + \cdots + f(2^{2011} - 1)$.

6. Tenemos una colección de esferas iguales que apilamos formando un tetraedro cuyas aristas tienen todas n esferas. Calcular, en función de n, el número total de puntos de tangencia (contactos) entre las esferas del montón.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase Local

Mañana del Sábado

1 Dado un número entero n escrito en el sistema de numeración decimal, formamos el número entero k restando del número formado por las tres últimas cifras de n el número formado por las cifras anteriores restantes. Demostrar que n es divisible por 7, 11 o 13 si y sólo si k también lo es.

2 Prueba que las sumas de las primeras, segundas y terceras potencias de las raíces del polinomio $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ valen lo mismo.

3 En una sala de baile hay 15 chicos y 15 chicas dispuestos en dos filas paralelas de manera que se formarán 15 parejas de baile. Sucede que la diferencia de altura entre el chico y la chica de cada pareja no supera los 10 cm. Demostrar que si colocamos los mismos chicos y chicas en dos filas paralelas en orden creciente de alturas, también sucederá que la diferencia de alturas entre los miembros de las nuevas parejas así formadas no superarán los 10 cm.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase Local

Tarde del Viernes

4 Calcula la suma de los inversos de los dos mil trece primeros términos de la sucesión de término general

$$a_n = 1 - \frac{1}{4n^2}$$

5 Obtén los dos valores enteros de x más próximos a 2013°, tanto por defecto como por exceso, que cumplen esta ecuación trigonométrica:

$$2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 2\sqrt{2}$$

6 Por los puntos medios de dos lados de un triángulo ABC trazamos las medianas y unimos los puntos que trisecan el tercer lado con el vértice opuesto. Así, en el interior, se obtiene una pajarita (dos triángulos unidos por un vértice). Se pide calcular la fracción de superficie total del triángulo que representa la pajarita.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

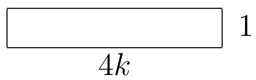
OLIMPÍADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA
Fase Local, León
Primera sesión, viernes 17 de enero de 2014

Problema 1. Se considera un polígono regular de 90 vértices, numerados del 1 al 90 de manera aleatoria. Probar que siempre podemos encontrar dos vértices consecutivos cuyo producto es mayor o igual que 2014.

Problema 2. Hallar las soluciones enteras de la ecuación

$$x^4 + y^4 = 3x^3y$$

Problema 3. Sea k un número entero positivo. Demostrar que es imposible cubrir totalmente un tablero cuadrado de lado $2014\,k$ (k veces 2014) con fichas de la forma



(orientadas de forma horizontal o vertical) sin que las fichas se solapen.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

OLIMPÍADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase Local, León

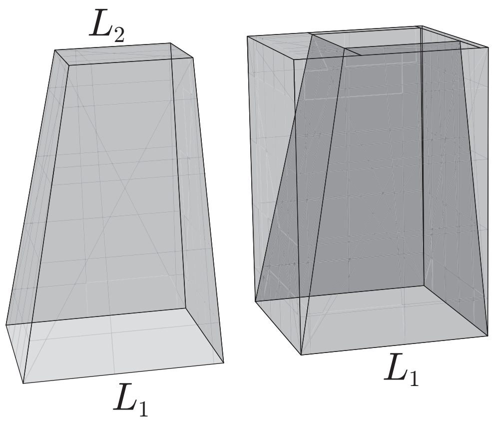
Segunda sesión, sábado 18 de enero de 2014

Problema 4. Sean a, b números positivos. Probar que

$$a + b \geq \sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Problema 5. En el triángulo ABC, sea M el punto medio de BC. Las rectas por M paralelas a AB, AC cortan a las bisectrices de B, C en los puntos P, Q respectivamente. Demostrar que la recta PQ es perpendicular a la bisectriz de A.

Problema 6. De un prisma recto de base cuadrada, con lado de longitud L_1, y altura H, extraemos un tronco de pirámide, no necesariamente recto, de bases cuadradas, con lados de longitud L_1 (para la inferior) y L_2 (para la superior), y altura H. Las dos piezas obtenidas aparecen en la imagen siguiente:



Si el volumen del tronco de pirámide es 2/3 del total del volumen del prisma, ¿cuál es el valor de L_1/L_2?

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

Soluciones 2012

2012, Problema 1

Llamamos $(*)$ a la condición de la hipótesis $a+b+c-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})>0$. Esto excluye el caso en que una de las variables sea 1, porque se tendría $0>0$, imposible. Además, $abc=1$ impide que a,b,c sean todos >1 o todos <1. Por lo tanto, al menos uno entre (a,b,c) es >1 y al menos uno es <1. Probaremos que es imposible el caso "dos mayores que 1, uno menor". Por la simetría en las variables, podemos suponer sin pérdida de generalidad que los números mayores que 1 son a y b. Sustituyendo $c=\frac{1}{ab}$ en la expresión $(*)$ resulta:

$$0<a+b+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-ab=\frac{a^2b+ab^2+1-b-a-a^2b^2}{ab}=\frac{-(a-1)(b-1)(ab-1)}{ab},$$

lo que es una contradicción, ya que $a-1$, $b-1$ y $ab-1$ son positivos si $a>1, b>1$. Al ser imposible que dos variables sean >1, debe ocurrir necesariamente el caso en que una es >1 y las otras dos <1.

Otra solución: en $(*)$ sustituir $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ por $bc+ca+ab$ y sumar $abc-1$, que es 0, con lo cual queda:

$$0<a+b+c-bc-ca-ab+abc-1=(a-1)(b-1)(c-1)$$

Qué suerte, factoriza! Como el producto de los tres números $a-1, b-1, c-1$ es positivo, o bien son los tres positivos (imposible, ya que eso implicaría $abc>1$), o bien dos de ellos son negativos y uno positivo, condición equivalente a la pedida en el enunciado.

2013, Problema 2

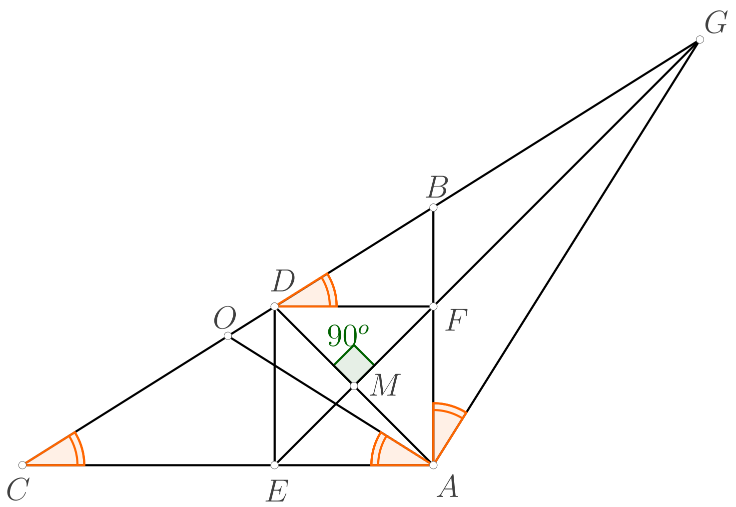
El jugador B utiliza la siguiente estrategia: copiar la paridad de la jugada de A. Esto siempre es posible, ya que B elige entre dos números consecutivos. En el primer par de turnos, si A elige 1, B elegirá 3, y si A escribe 2, B escribirá un 2. De esta manera, la suma parcial de los turnos 1 y 2 será 4. De forma similar, B siempre podrá forzar a que la suma de los turnos 3 y 4 sea $3+5$ o $4+4$, en cualquier caso 8, y en general, para todo n, la suma de los turnos $2n-1$ y $2n$ será igual a $4n$, si B mantiene su estrategia (si A elige $2n-1$, B elige $2n+1$, si A elige $2n$, B elige $2n$). Veamos con qué situación se encontrará A cuando hayan transcurrido 2010 turnos, es decir, 1005 parejas de turnos. La suma de los números escritos hasta ese momento será

$$\sum_{n=1}^{1005} 4n = 4\cdot\frac{1005\cdot 1006}{2}=4\cdot 1005\cdot 503,$$

que es múltiplo de 3 por serlo 1005. En el turno 2011, A debe elegir entre jugar 2011 o 2012, ninguno de los cuales es múltiplo de 3, por lo tanto no puede ganar, la victoria es siempre de B.

2012, Problema 3

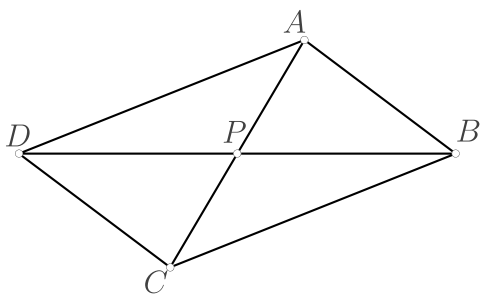
Sea O el punto medio de la hipotenusa BC, o sea el centro de la circunferencia que pasa por A, B, C. Como AG corta a la circunferencia en A, para asegurar la condición de tangencia basta probar que AG es perpendicular a AO.



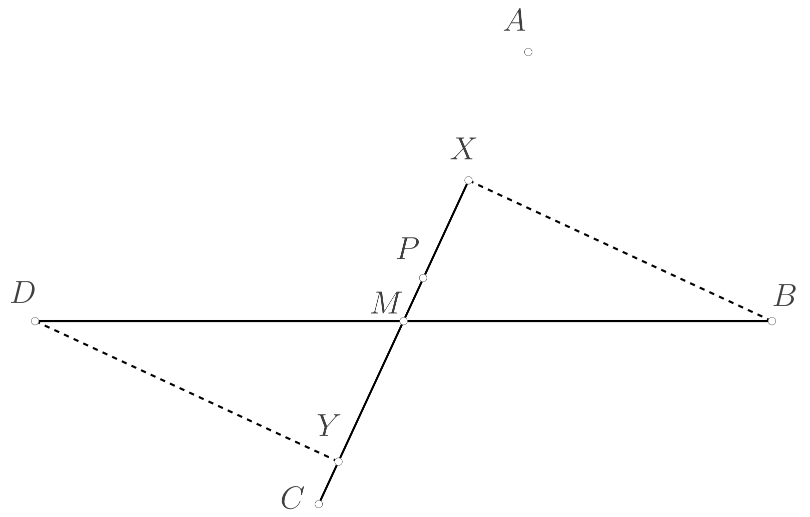
Para deducir la inclinación de A, la clave la proporcionan las simetrías del cuadrado: la diagonal EF es un eje de simetría, respecto al cual los puntos A, D son simétricos. Como además G, F están en el eje, se tiene la igualdad de ángulos simétricos $G\widehat{A}F = G\widehat{D}F$. Esta última igualdad también se podía haber deducido del hecho de que los triángulos GAF y GDF son congruentes (iguales) por tener iguales dos lados ($FA = FD$, $FG = FG$) y el ángulo comprendido entre ellos $G\widehat{F}A = G\widehat{F}D = 135^o$. Además, la relación de paralelismo $DF||CA$ implica que $G\widehat{D}F = B\widehat{C}A$, y el triángulo OCA es isósceles con $OC = OA$, con lo cual $O\widehat{C}A = C\widehat{A}O$. Tenemos por lo tanto cuatro ángulos iguales, todos con valor $\widehat{C}$. El ángulo $G\widehat{A}O$ se obtiene finalmente sumando y restando ángulos conocidos

$$G\widehat{A}O = G\widehat{A}B + B\widehat{A}C - C\widehat{A}O = 90^o + \widehat{C} - \widehat{C} = 90^o$$

2012, Problema 4



Si P es la intersección de las diagonales, las igualdades de áreas implican que P debe ser el punto medio de AC y de BD, con lo cual $ABCD$ es un paralelogramo.



Excluido el caso anterior, P no pertenece a al menos una de las dos diagonales, supongamos que P no está en BD. Sea M el punto de corte de PC y BD. Los triángulos PCB y PCD tienen base común PC. Para que tengan igual área, sus alturas BX y DY deben ser iguales, es decir, los triángulos MBX y MDY, que sabemos que son semejantes (Tales), resultan ser congruentes, o sea que M es el punto medio de BD. Lo que acabamos de demostrar se resume en la afirmación "si P no está en BD, entonces PC pasa por el punto medio de BD". De la misma forma se prueba que PA también pasa por el punto medio de BD, con lo cual PC y PA son la misma recta (la diagonal AC) y esta diagonal corta a la otra diagonal BD en su punto medio M. Ahora que sabemos que P está en AC, la igualdad de triángulos PAB y PCB implica que P debe ser el punto medio de AC.

Conclusión: el cuadrilátero debe ser tal que las diagonales se corten en el punto medio de una de ellas, y P debe ser el punto medio de la otra diagonal (esto incluye como caso particular el caso del paralelogramo).

2012, Problema 5

Demostraremos que para todo k entero positivo se tiene

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(2^k - 1) = 2^k - 1$$

Esto resolverá el problema en el caso particular $k = 2011$. Para $k = 1$ se cumple: $f(1) = 1$. Para $k = 2$: $f(1) + f(2) + f(3) = 1 + 0 + 2 = 3$, también se cumple. En general, si sumamos las condiciones $f(2n) = f(n) - 1$ y $f(2n + 1) = f(n) + 1$ se tiene

$$\begin{aligned} f(2) + f(3) &= \text{2 veces } f(1) \\ f(4) + f(5) &= \text{2 veces } f(2) \\ f(6) + f(7) &= \text{2 veces } f(3) \\ &\cdots \\ f(2^{k+1} - 2) + f(2^{k+1} - 1) &= \text{2 veces } f(2^k - 1) \end{aligned}$$

Así se puede reducir el caso $k+1$ al caso k y aplicar inducción, no es difícil. Sumamos todas las igualdades anteriores, agregamos 1, y aplicamos la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned}
\underbrace{f(1)}_{1}+f(2)+\cdots+f(2^{k+1}-1) &= 1+2\cdot\underbrace{(f(1)+f(2)+\cdots+f(2^k-1))}_{2^k-1} \\
&= 1+2\cdot 2^k-2 \\
&= 2^{k+1}-1
\end{aligned}$$

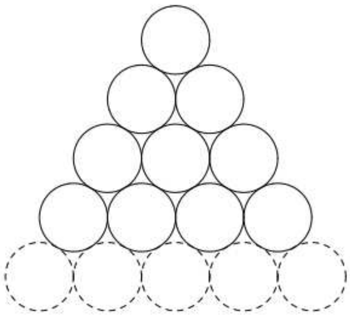
Existe otra solución muy bonita y "olímpica": observar que si se escribe n en base 2, se tiene que f coincide con la función binaria $g(n) = \text{ número de unos } - \text{ número de ceros }$. En efecto, la operación "pasar de n a $2n$" agrega un 0 al final de la expresión binaria de n, y la operación "pasar de n a $2n+1$" añade un 1 al final. Entonces, g cumple $g(1)=1$ y verifica la misma fórmula recurrente que f, luego ambas funciones coinciden.

Se trata entonces de contar todos los unos y ceros de las expresiones binarias de los números $1,2,\ldots,2^k-1$. Y observar que en el bloque que va desde una potencia de 2 hasta la siguiente potencia de 2 menos 1, todos los números empiezan por 1 y se continúan con todas las posibles permutaciones de ceros y unos (cuyo efecto se cancela).

Esto se ilustra en la siguiente tabla: en cada bloque entre potencias de 2, aparece una columna de unos, seguida de una zona mixta donde los unos y ceros se compensan porque aparecen todas las posibles permutaciones.

n	bit dominante	resto de bits
1	1	
2	1	0
3	1	1
4	1	00
5	1	01
6	1	10
7	1	11
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

2012, Problema 6



Analicemos primero el problema en el caso plano. Sea A_n el número de contactos de n esferas colocadas en un triángulo plano con n esferas en cada uno de los lados (primera figura). Fijémonos que el número total de esferas es, evidentemente, $T_n = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Para $n=2$ filas, hay 3 contactos, luego $A_2=3$. Para $n>2$, calcularemos A_n en función de A_{n-1}. En un triángulo de n filas habrá los A_{n-1} contactos que ya había en el triángulo de $n-1$

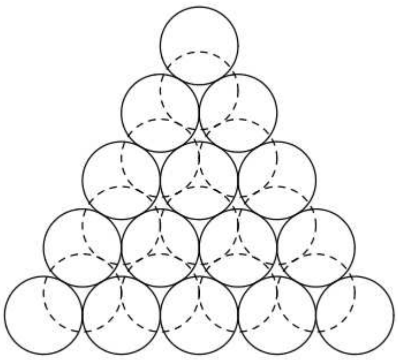
filas, más lo que provengan de añadir la última fila, indicada con trazo punteado en la figura. Al agregar esta última fila se producen contactos de dos tipos:

- Los que hay entre las bolas de la fila n-ésima, que son $n-1$.
- Los que tienen las bolas de la fila n-ésima con la anterior, que son $2(n-1)$ ya que cada bola de la fila $n-1$ toca a dos de la fila n.

Así pues, $A_n = A_{n-1} + 3(n-1)$. Aplicando repetidas veces la relación de recurrencia anterior y sustituyendo $A_2 = 3$ obtenemos

$$A_n = A_2 + \sum_{i=3}^{n} 3(i-1) = 3(1+2+\cdots+(n-1)) = \frac{3n(n-1)}{2} = 3T_{n-1}$$

Ahora ya podemos analizar el problema en el espacio 3D.



Sea C_n el número de contactos en un montón tetraédrico de esferas con aristas de n esferas. En la segunda figura hemos representado las esferas de la base en trazo continuo y las del piso inmediato superior en trazo discontinuo. Al añadir la capa n-ésima, estamos agregando contactos de dos tipos:

- Los propios del piso, un triángulo plano de n bolas de lado. Éstos son $A_n = 3T_{n-1}$, como hemos visto en el caso plano.
- Los que provienen de contactos entre el piso $n-1$ y el piso n. Éstos son $3T_{n-1}$, ya que cada bola del piso $n-1$ toca a tres del piso n.

En total, pues, el número de contactos es $C_n = C_{n-1} + 6T_{n-1} = C_n + 3n(n-1)$. Partiendo del caso inicial $C_1 = 0$, resulta entonces

$$C_n = \sum_{i=2}^{n} 3i(i-1) = \sum_{i=1}^{n} 3i(i-1) = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - 3\sum_{i=1}^{n} i = \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{3n(n+1)}{2},$$

que simplificado es $n^3 - n$, o factorizado $n(n-1)(n+1)$.

Soluciones 2013

2013, Problema 1

Si B el número formado por las últimas 3 cifras de n, y A el número formado por las anteriores cifras, se cumple que $n = 1000 \cdot A + B$, ya que n se obtiene colocando 3 ceros a la derecha de A, y sumando B para rellenar ese hueco. Entonces $k = B - A$, y la diferencia entre n y k es $n - k = 1001 \cdot A$. Da la casualidad que 1001 es justamente el producto de 7, 11 y 13, o sea que $n - k$ es múltiplo de 7, de 11 y de 13. Si la resta de dos números es múltiplo de (7, 11 o 13), y uno de ellos lo es, también debe serlo el otro, lo cual resuelve el problema.

2013, Problema 2

Si p, q, r son las raíces de $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$, hay que probar que

$$p + q + r, \quad p^2 + q^2 + r^2, \quad p^3 + q^3 + r^3$$

valen lo mismo. Usaremos las relaciones de Cardano-Vieta entre coeficientes y raíces:

$$p + q + r = -2, \quad pq + qr + rp = 3, \quad pqr = -4$$

Intentaremos combinar los polinomios $p+q+r$, $pq+qr+rp$ y pqr, cuyos valores son conocidos, para formar las sumas de potencias. Por ejemplo, elevando $p + q + r$ al cuadrado se tiene

$$\underbrace{(p + q + r)^2}_{=(-2)^2=4} = p^2 + q^2 + r^2 + \underbrace{2(pq + qr + rp)}_{=2\cdot 3=6},$$

lo que prueba que $p^2 + q^2 + r^2 = -2$. Para calcular $p^3 + q^3 + r^3$, podríamos seguir probando distintas combinaciones de los polinomios conocidos (... lo cual tiene cierto componente "artesanal"...), o también observar que, por ser p, q, r raíces del polinomio, se cumple que

$$p^3 = -2p^2 - 3p - 4, \quad q^3 = -2q^2 - 3q - 4, \quad r^3 = -2r^2 - 3r - 4,$$

Sumando estas tres igualdades y sustituyendo $p + q + r = -2$ y $p^2 + q^2 + r^2 = -2$ se deduce que $p^3 + q^3 + r^3$ también vale -2.

2013, Problema 3

Supongamos que colocamos a los chicos en una fila, por orden de alturas, y las chicas en una fila paralela, formando las parejas iniciales. Llamaremos *jugada* a la siguiente operación: si dos chicos con alturas $a \le a'$ forman pareja con dos chicas de alturas b, b' respectivamente, y ocurre que $b > b'$ (es decir, las chicas no están correctamente colocadas de acuerdo a su altura), entonces intercambiamos las parejas: a bailará con b' y b con a'. Está claro que partiendo de cualquier disposición inicial se puede llegar tras un número finito de jugadas a la configuración final, donde todas las chicas están colocadas por orden creciente de alturas. El problema quedará resuelto si probamos que en cada jugada se mantiene o disminuye la diferencia máxima entre los miembros de las parejas implicadas. Eso probará que si al principio la altura máxima entre los miembros de una pareja era menor que 10 cm, al final seguirá siéndolo.

Estudiemos la jugada que involucra a los chicos de alturas $a \leq a'$, emparejados con chicas de alturas $b > b'$ respectivamente, y veremos que al formar las nuevas parejas a con b', a' con b, la diferencia de alturas para cada pareja será $\leq$ alguna de las diferencias de alturas de las parejas anteriores, lo que asegurará que la diferencia máxima nunca aumentará.

Distinguimos según los casos que pueden presentarse.

Caso	Diferencia entre a', b	Diferencia entre a, b'
$a \leq a' \leq b' \leq b$	$b - a' \leq b - a$	$b' - a \leq b - a$
$a \leq b' \leq a' \leq b$	$b - a' \leq b - a$	$b' - a \leq b - a$
$a \leq b' \leq b \leq a'$	$a' - b \leq a' - b'$	$b' - a \leq b - a$
$b' \leq a \leq a' \leq b$	$b - a' \leq b - a$	$a - b' \leq a' - b'$
$b' \leq a \leq b \leq a'$	$a' - b \leq a' - b'$	$a - b' \leq a' - b'$
$b' \leq b \leq a \leq a'$	$a' - b \leq a' - b'$	$a - b' \leq a' - b'$

2013, Problema 4

Primero simplificamos un poco la expresión de $\frac{1}{a_n}$:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4n^2}} = \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = 1 + \frac{1}{4n^2 - 1} = 1 + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

A continuación, observamos que

$$\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{(2n+1) - (2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

Con lo cual la suma pedida es

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2013} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{2013} 1 + \sum_{n=1}^{2013} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\
&= \sum_{n=1}^{2013} 1 + \sum_{n=1}^{2013} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\
&= 2013 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{4025} - \frac{1}{4027}\right) \\
&= 2013 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4027}\right) = 2013 + \frac{2013}{4027}
\end{aligned}$$

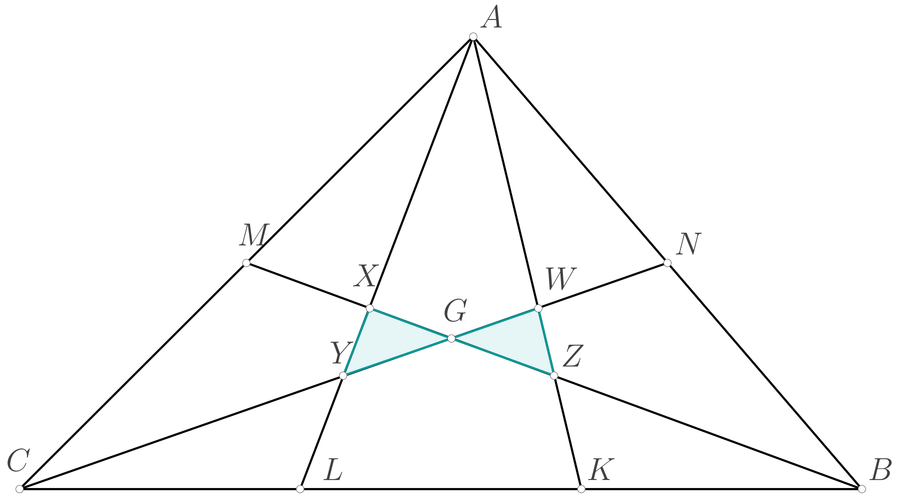
2013, Problema 5

Usando que $sen^2 x + cos^2 x = 1$ para todo x, y llamando $a = 2^{sen^2 x}$, la ecuación a resolver se transforma en:

$$2\sqrt{2} = 2^{sen^2 x} + 2^{1 - sen^2 x} = a + \frac{2}{a} \Rightarrow 0 = a + \frac{2}{a} - 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}\right)^2,$$

lo que implica que $\sqrt{a} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} = 0$, es decir $a = \sqrt{2}$. En potencias de 2, tenemos que $2^{sen^2 x} = 2^{\frac{1}{2}}$, con lo cual $sen^2 x = \frac{1}{2}$, o bien $sen x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Esto ocurre cuando $x = 45^o$, más un múltiplo entero de 90^0, o lo que es lo mismo, x es un múltiplo impar de 45. Los valores más cercanos a 2013 son $45 \cdot 43 = 1935$ y $45 \cdot 45 = 2025$.

2013, Problema 6



Para calcular el área sombreada de los triángulos GXY, GZW, hay que localizar mediante razones y proporciones la posición relativa de los puntos X, Y, Z, W en las rectas AL, AK, BM, CN. Asumiremos (pendiente de ser justificado con posterioridad) las siguientes proporciones:

$$\frac{AW}{WK} = \frac{3}{2}, \frac{CW}{WN} = \frac{4}{1}, \frac{AX}{XL} = \frac{3}{2}, \frac{BX}{XM} = \frac{4}{1}, \frac{MZ}{ZB} = \frac{1}{1}, \frac{AZ}{ZK} = \frac{3}{1}, \frac{NY}{YC} = \frac{1}{1}, \frac{AY}{YL} = \frac{3}{1}$$

Además, es conocido que el baricentro G divide a las medianas BM y CN en tercios, una parte es el doble de la otra: $\frac{BG}{GM} = \frac{CG}{GN} = \frac{2}{1}$. Si imaginamos la mediana BM dividida en 15 partes iguales, se deduce de las proporciones anteriores que GM ocupa 5 partes, BX y XM ocupan 12 y 3 partes, por lo tanto $\frac{GX}{GM} = \frac{5-3}{5} = \frac{2}{5}$.

Dividiendo CN en 6 partes iguales, vemos que CY ocupa 3 de estas partes y CG ocupa 4, luego $\frac{GY}{GC} = \frac{1}{4}$. Ahora bien, los triángulos GXY y GMC tienen un ángulo común en G, y los lados adyacentes del pequeño son $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{4}$ del grande. Multiplicando las fracciones, se deduce que el área de GXY es $\frac{1}{10}$ del área de GMC. Por otra parte, las tres medianas dividen al triángulo original en 6 triángulos de igual área (uno de ellos es GMC), por lo cual el cociente entre las áreas de GXY y ABC es igual al producto de fracciones $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{60}$. Por un razonamiento simétrico, la otra mitad de la pajarita ocupa también una superficie relativa de $\frac{1}{60}$, y la pajarita completa cubre entonces $\frac{1}{30}$ del área total.

Ahora calcularemos las proporciones asumidas al principio. Entre los varios procedimientos disponibles, uno muy elegante es el de la Geometría de Masas. Aceptaremos el siguiente principio: si los extremos A, B de un segmento tienen pesos a, b, entonces el centro de masa de A, B es un punto G del segmento cuyo cociente de distancias a los extremos es inversamente proporcional al cociente de las masas: $\frac{GA}{GB} = \frac{b}{a}$. Por ejemplo, si colocamos pesos iguales en A y B, su centro de masa es el punto medio N. Si colocamos 2 unidades de peso en N y 1 unidad en C, el centro es G ya que $\frac{GN}{GC} = \frac{1}{2}$, relación inversa a la relación de masas.

Localización de W: asignamos pesos $A = 2, B = 2, C = 1$. Con estos pesos, el punto de equilibrio entre B y C es K, por lo tanto el centro de masa del triángulo ABC es un punto del segmento AK. Por otra parte, el punto de equilibrio de A, B es N, luego el centro de masa de ABC (para estos pesos) es un punto del segmento CN. El centro de ABC es entonces W, la intersección de CN con AK. Si juntamos las 2+1=3 unidades de masa de B, C en su punto de equilibrio K, tenemos que el peso de todo el triángulo está concentrado en AK, 2 unidades en A y 3 en K. Como el centro de masa es W, se tiene la relación inversa para las distancias: $\boxed{\frac{AW}{WK} = \frac{3}{2}}$. Análogamente, juntando las 2+2=4 unidades de peso de A, B en N y dejando C con peso 1, deducimos que $\boxed{\frac{CW}{WN} = \frac{4}{1}}$.

Localización de Z: si asignamos pesos $\{A = 1, B = 2, C = 1\}$, ahora A, C se equilibran en su punto medio M, los puntos B, C se equilibran en K y el centro de masa del triángulo ABC es $BM \cap AK = Z$. Razonando de forma similar al caso del punto W se deducen las relaciones $\boxed{\frac{MZ}{ZB} = \frac{1}{1}}$ y $\boxed{\frac{AZ}{ZK} = \frac{3}{1}}$.

Las restantes cuatro proporciones se deducen mediante un razonamiento simétrico en la mitad izquierda de la figura.

Más detalles sobre la Geometría de Masas pueden consultarse en el blog del profesor F. J. García Capitán: `http://garciacapitan.blogspot.com.es/`

Soluciones 2014

2014, Problema 1

Observar que $44\times45=1980$, $45\times45=2025$, $45\times46=2070$,..., y en general, el producto de dos números es con toda seguridad >2014 si ambos son mayores o iguales que 45. Definimos los conjuntos $A=\{1,2,\ldots,44\}$ y $B=\{45,46,\ldots,90\}$. Por otra parte, agrupamos los 90 vértices en 45 parejas de vértices consecutivos: el 1ro con el 2do, el 3ro con el 4to, etc. Dado que A tiene solamente 44 elementos y hay 45 parejas, necesariamente encontraremos al menos una pareja sin elementos de A, es decir con sus dos elementos en B, y por lo tanto su producto será $\geq 45\times 46$, que es 2070, mayor que 2014.

2014, Problema 2

Primera solución, trabajando con polinomios. Si $y=0$, la única posibilidad para x es 0. Si $y\neq 0$, podemos dividir la ecuación original entre y^4, y tendremos $\frac{x^4}{y^4}+1=3\frac{x^3}{y^3}$, que puede escribirse también como $z^4-3z^3+1=0$, introduciendo la variable $z=\frac{x}{y}$. Encontrar soluciones enteras x,y con $y\neq 0$ en la ecuación original equivale a encontrar soluciones racionales $z=\frac{x}{y}$ para esta nueva ecuación. Existe un resultado (teorema de la raíz racional) que asegura que toda raíz racional $\frac{p}{q}$ de un polinomio con coeficientes enteros debe cumplir que p divide al término independiente, y q divide al coeficiente del término de mayor grado. En este caso, el coeficiente de z^4 y el término independiente son ambos 1, lo que implica que los únicos candidatos para x,y son 1 y -1, o sea que los únicos valores posibles para z son también 1 o -1. Pero ninguno de ellos proporciona una solución. En consecuencia, no existen soluciones con $y\neq 0$, y la única solución posible es $x=0,y=0$.

Segunda solución, razonando con divisibilidad. Si x,y son ambos impares, la ecuación se transforma en impar + impar = impar, lo que es imposible. Si x,y son uno par y el otro impar, el término de la izquierda es impar y el de la derecha es par, también imposible. Por lo tanto, si existe alguna solución con x,y enteros, ambos deben ser pares. Entonces los números x^4,y^4,x^3y son todos divisibles por 2^4. Dividiendo la ecuación $x^4+y^4=3x^3y$ entre 2^4 se tiene

$$\left(\frac{x}{2}\right)^4+\left(\frac{y}{2}\right)^4=3\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{y}{2}\right)$$

Esto demuestra que si (x,y) es una solución entera, entonces $\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)$ es otra solución entera. Repitiendo el razonamiento anterior, $\frac{x}{2},\frac{y}{2}$ deben ser ambos pares, es decir, x,y deben ser múltiplos de 4, y así sucesivamente, x,y deben ser divisibles por todas las potencias de 2, lo cual solamente es posible si x,y son ambos cero.

2014, Problema 3

Resolveremos el problema con $k = 1$, para ilustrar el uso del truco de colorear o etiquetar un tablero. Coloreamos las casillas con cuatro colores a, b, c, d de esta manera:

```
a b c d a b c d ....
b c d a b c d a ....
c d a b c d a b ....
....
```

Esto permite asegurar que cualquier pieza de tamaño 4×1, ya sea orientada en forma horizonal o vertical, cubre una casilla de cada color. Si conseguimos probar que el tablero no tiene igual cantidad de casillas de cada color, quedará establecida la imposibilidad de la tarea pedida en el enunciado. La clave radica en que 2014 no es múltiplo de 4, ya que $2014 = 4 \cdot 503 + 2$. El tablero puede descomponerse en cuatro regiones: una 2012×2012, otra 2012×2, otra 2×2014 y finalmente una 2×2:

```
 a b c d . . . . .|a b
 b c d a          |b c
 c d a b          |c d
 d a b c          |d a
 .       .        |. .
 .         .      |. .
 .           .    |. .
 .              . |. .
----------------+---
 a b c d . . . . .|a b
 b c d a . . . . .|b c
```

Debido al patrón repetitivo de 4 en 4, todas las regiones tienen igual cantidad de casillas de cada color, excepto la última región 2×2, donde está repetido b y falta d.
El caso $k > 1$ no es significativamente más complicado, si se conoce esta técnica.

2014, Problema 4

Primera solución, haciendo cuentas. Por ser los dos términos de la desigualdad positivos, se puede elevar al cuadrado sin perder ni ganar soluciones. Combinamos elevaciones al cuadrado con reagrupaciones de términos y finalmente una factorización:

$$\begin{aligned}
a+b &\geq \sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \\
a^2+2ab+b^2 &\geq ab+\frac{a^2+b^2}{2}+2\sqrt{\frac{ab(a^2+b^2)}{2}} \\
\frac{a^2+2ab+b^2}{2} &\geq 2\sqrt{\frac{ab(a^2+b^2)}{2}} \\
(a^2+2ab+b^2)^2 &\geq 8ab(a^2+b^2) \\
a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4 &\geq 0 \\
(a-b)^4 &\geq 0, \quad \text{que ciertamente se cumple}
\end{aligned}$$

Segunda solución, utilizando desigualdades típicamente olímpicas. La desigualdad más utilizada, la de las medias aritmética y geométrica, afirma que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Por otra parte, la desigualdad "media cuadrática $\geq$ media aritmética" afirma que $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$. A la vista de estas desigualdades, el primer término del lado derecho es $\leq$ la mitad del izquierdo, pero el segundo término es $\geq$ la mitad del izquierdo. Por lo tanto, no parece haber una forma inmediata de encadenar dos desigualdades para resolver el problema.

Otra desigualdad bastante utilizada es la del producto escalar o de Cauchy-Schwarz, que para el caso de los vectores $(p, q), (r, s)$ se escribe así:

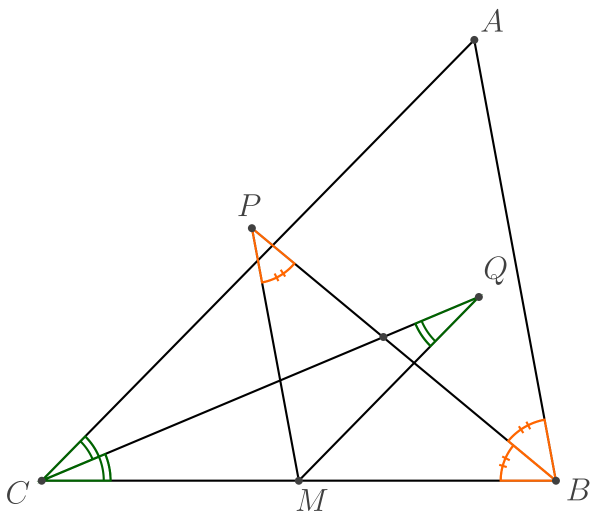
$$p.r + q.s \leq \sqrt{p^2 + q^2} \cdot \sqrt{r^2 + s^2}$$

En este problema aplicamos la desigualdad a los vectores $(\sqrt{ab}, \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}})$ y $(1, 1)$:

$$\sqrt{ab} \cdot 1 + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \cdot 1 \leq \sqrt{ab + \frac{a^2 + b^2}{2}} \cdot \sqrt{1 + 1},$$

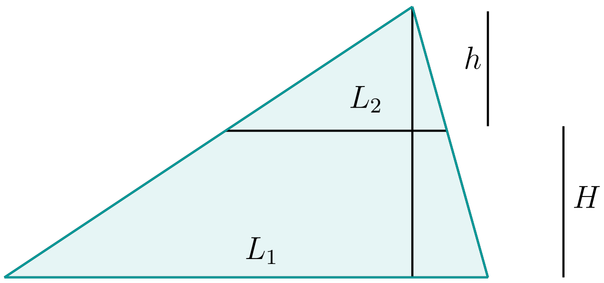
que se simplifica obteniendo $a + b$.

2014, Problema 5



La condición de paralelismo $MP||AB$ nos da la igualdad de ángulos $M\widehat{P}B = P\widehat{B}A$, y este último es igual a $P\widehat{B}M$, por ser BP bisectriz de B. Esto prueba que el triángulo BMP es isósceles con $MB = MP$. De igual forma, las igualdades $M\widehat{Q}C = Q\widehat{C}A = Q\widehat{C}M$ prueban que CMQ es isósceles con $MC = MQ$. Como $MB = MC$ por ser M el punto medio de BC, deducimos que $MP = MQ$. En el triángulo isósceles MPQ, el lado PQ es perpendicular a la bisectriz del ángulo en M. Pero los ángulos $P\widehat{M}Q$ y $B\widehat{A}C$ tienen lados paralelos, por lo tanto sus bisectrices son paralelas, lo que prueba que PQ es perpendicular a la bisectriz de A.

2014, Problema 6



Si H es la altura del tronco y lo prolongamos una altura h hasta obtener una pirámide completa de altura $H + h$, se tendrá una sección como en esta figura.

Un argumento de semejanza de triángulos permite comprobar que $\frac{h+H}{L_1} = \frac{h}{L_2}$, y por tanto

$$h = \frac{HL_2}{L_1 - L_2}.$$

Además, podemos observar que

$$\begin{aligned} \text{Volumen del tronco de pirámide} &= \frac{1}{3}(L_1^2(H+h) - L_2^2 h) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{HL_1^3}{L_1 - L_2} - \frac{HL_2^3}{L_1 - L_2}\right) \\ &= \frac{H}{3} \cdot \frac{L_1^3 - L_2^3}{L_1 - L_2} = \frac{H}{3}(L_1^2 + L_1L_2 + L_2^2). \end{aligned}$$

Así, teniendo en cuenta que el volumen del tronco es $\frac{2}{3}$ del volumen del prisma, tendremos la ecuación

$$\frac{H}{3}(L_1^2 + L_1L_2 + L_2^2) = \frac{2}{3}HL_1^2,$$

que al multiplicar por $\frac{3}{HL_2^2}$ se transforma en una ecuación de segundo grado en la variable $x = \frac{L_1}{L_2}$, concretamente $x^2 - x - 1 = 0$, cuya única solución positiva es

$$\frac{L_1}{L_2} = x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Se trata de la “razón áurea”.