Preparación para la Olimpíada Matemática Española 2012
MÁS GEOMETRÍA

Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León

Documento 3, febrero de 2013

Resumen

Más Geometría: Teoría, muchos problemas propuestos y algunos resueltos para mostrar las técnicas que se utilizan.

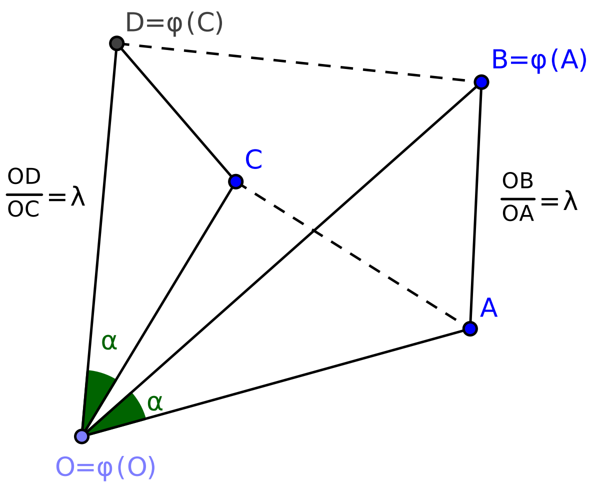
Índice

1. Teoría

1.1. Rotohomotecia

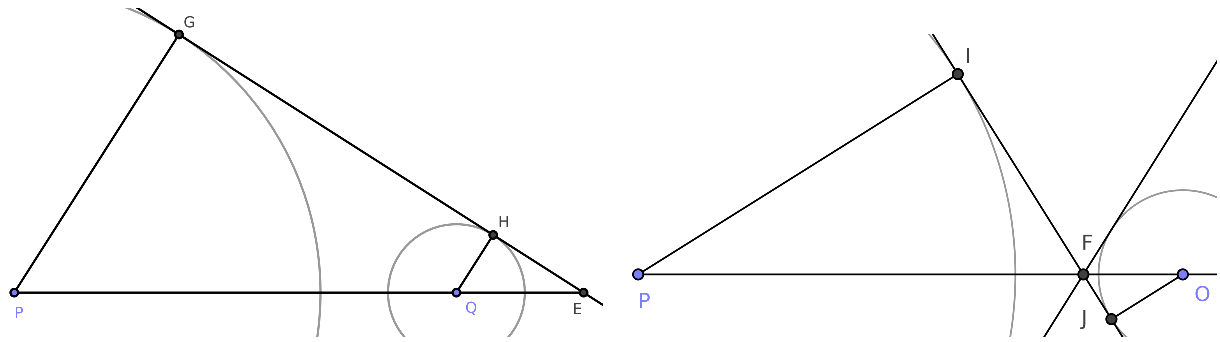
Se llama rotohomotecia φ de centro O, ángulo α y razón λ a la combinación de una rotación de ángulo α con una homotecia de razón λ, ambas transformaciones con el mismo centro O. El orden de aplicación es irrelevante: primero la homotecia y después la rotación, o viceversa. Por definición, todos los triángulos $O, X, \varphi(X)$ son semejantes entre sí, por uno de los criterios de semejanza de triángulos: todos tendrán un ángulo α en el vértice O, y los lados adyacentes tendrán cociente constante λ. Además, como ocurre con toda semejanza, todo triángulo XYZ es semejante al triángulo $\varphi(X)\varphi(Y)\varphi(Z)$. Combinando estos hechos se tiene lo siguiente.

Teorema 1.1 (Dos semejanzas con el mismo centro) *Si OAB y OCD son triángulos semejantes, también son semejantes OAC y OBD.*



1.2. Homotecias asociadas a dos circunferencias

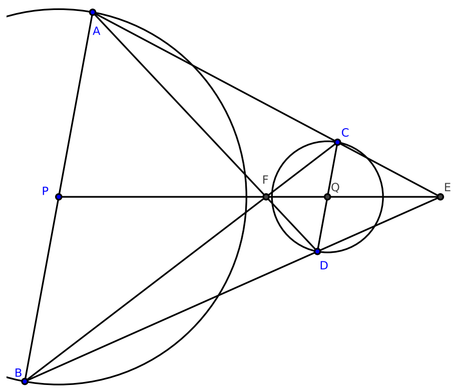
Problema 1.2 *Dados dos círculos sin puntos interiores comunes, trazar con regla y compás las 4 tangentes comunes a ambos.*

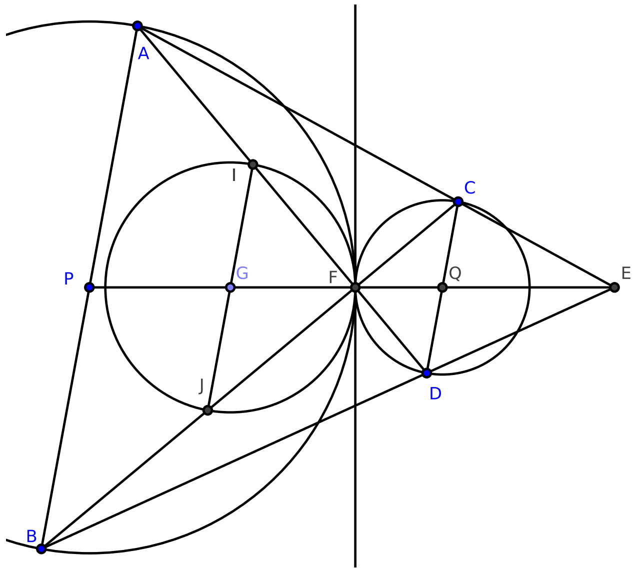


Solución. Sean P, Q los centros, r_1, r_2 los radios, E el punto de corte de las tangentes exteriores (sólo se muestra una, la otra es simétrica respecto a PQ), y F el punto de corte de las tangentes interiores. Mediante semejanzas de triángulos se ve que E y F son centros de homotecias, ambas de razón $\frac{r_1}{r_2}$, que transforman una circunferencia en la otra. Por lo tanto, los puntos E, F desde los cuales es posible trazar tangentes comunes quedan determinados en el segmento que une los centros P, Q, uno dentro y otro fuera, por las relaciones $\frac{EP}{EQ} = \frac{r_1}{r_2}, \quad \frac{FP}{FQ} = \frac{r_1}{r_2}$.

Entonces, ¿cómo trazar E, F con regla y compás? Muy sencillo: sabiendo que las homotecias transforman diámetros en diámetros paralelos (y radios en radios paralelos), la solución es

Elegir diámetros $AB||CD$ y contruir $E = AC \cap BD$, $F = AD \cap BC$.





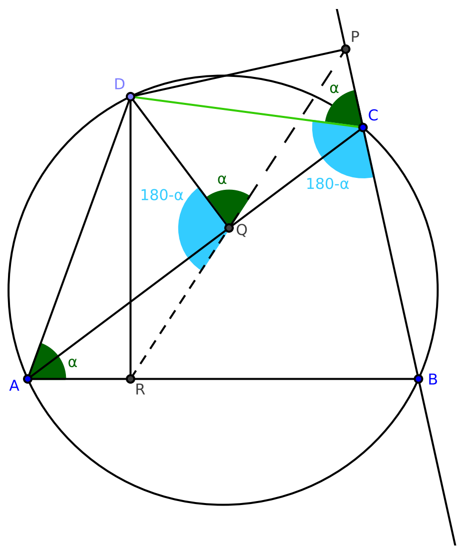
Nota: cuando las circunferencias son tangentes entre sí interior- o exterior-mente, uno de los centros de homotecia es el punto común de tangencia. En problemas donde hay circunferencias tangentes, esto es muy útil para detectar alineaciones de puntos o paralelismos de entre rectas.

Problema 1.3 *Sean AB, CD, IJ diámetros paralelos de tres circunferencias tangentes en un mismo punto F según la figura derecha. Razonando con semejanzas o con homotecias adecuadas de centro F, probar las alineaciones de puntos* $\{F, I, A\}$, $\{F, I, D\}$, $\{F, J, B\}$, $\{F, J, C\}$.

1.3. Teorema de la recta de Simson

Teorema 1.4 (Recta de Simson) *Sean P, Q, R las proyecciones de un punto D sobre los lados BC, CA, AB del triángulo ABC. Si D está en la circunferencia circunscrita de ABC, entonces P, Q, R están alineados. Y recíprocamente, si P, Q, R están alineados, entonces A, B, C, D están sobre una misma circunferencia.*

Dem. Partiendo de $D\widehat{A}B = \alpha$, se utilizan los cuadriláteros inscriptibles $ABCD$, $ARQD$ y $DPCQ$ para deducir los ángulos de la figura.



1.4. Teoremas de Ceva y Menelao

Teorema 1.5 (Teorema de Ceva) *Sean D, E, F puntos en los segmentos BC, CA y AB de un triángulo. Entonces las rectas AD, BE, CF son concurrentes si y sólo si*

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

El teorema es válido si dos de los 3 puntos son exteriores a los segmentos.

Teorema 1.6 (Teorema de Menelao) *Sean D, E, F puntos exteriores a los segmentos BC, CA y AB, respectivamente. Entonces los puntos D, E, F están alineados si y sólo si*

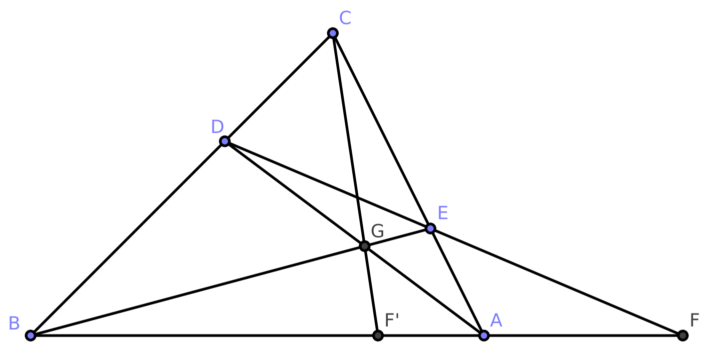
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

El teorema es válido si 2 de los 3 puntos son interiores y 1 exterior.

1.5. Cuaternas armónicas

Dos puntos X, Y se dice que son armónicos respecto al segmento AB si X, Y están en la misma razón $\frac{XA}{XB} = \frac{YA}{YB}$, siendo uno de ellos interior al segmento y el otro exterior. En estas condiciones, la cuaterna de puntos $[A, B, X, Y]$ se denomina armónica. Es inmediato comprobar que también son armónicas las cuaternas $ABYX$, $BAXY$, $BAYX$, $XYAB$, $XYBA$, $YXAB$, $YXBA$.

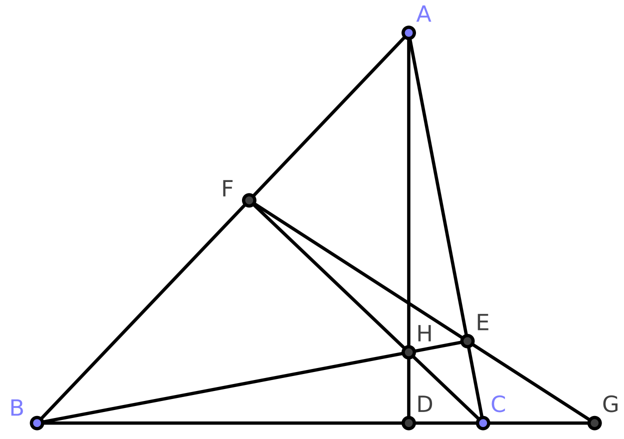
La configuración típica que produce una cuaterna armónica es la siguiente: tres cevianas (rectas que parten de los vértices de un triángulo) concurrentes en un punto interior, y se prolonga la recta que une dos de los puntos de corte con los lados, hasta cortar al tercer lado.

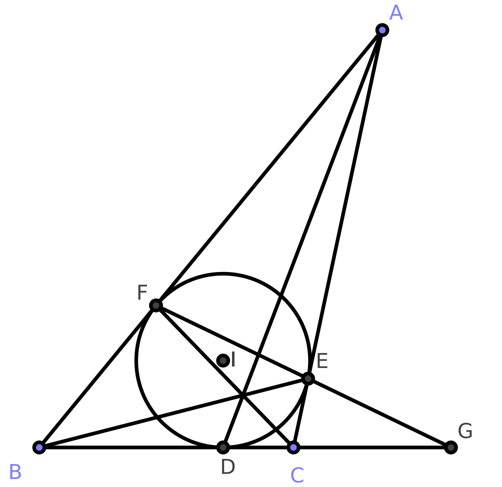


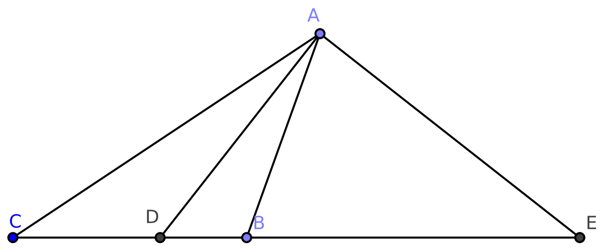
Por el teorema de Ceva tenemos: $\frac{AF'}{F'B}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA} = 1$.
Y aplicando el teorema de Menealo: $\frac{AF}{FB}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA} = 1$, con lo cual se obtiene

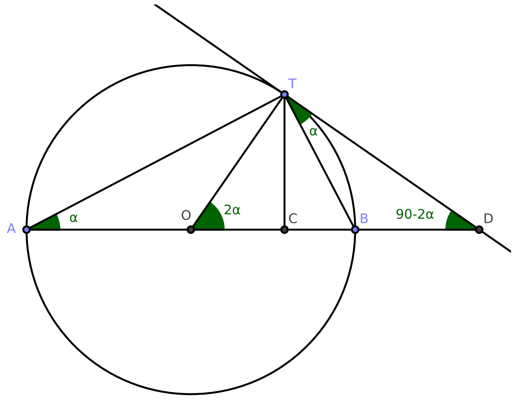
$$\frac{FA}{FB} = \frac{F'A}{F'B}.$$

Otras cuaternas armónicas que suelen aparecer









En la primera figura se tienen las tres alturas AD, BE, CF concurrentes, luego si definimos $G = DE \cap BC$, se puede asegurar que la cuaterna B, C, D, G es armónica, es decir $\frac{DB}{DC} = \frac{GB}{GC}$.

En la segunda figura D, E, F son los puntos de contacto con la circunferencia inscrita. Observemos que

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

porque $AE = AF$, $BD = BF$ y $CD = CE$. Entonces, por Ceva, las rectas AD, BE, CF son concurrentes, por lo tanto estamos en la configuración típica y podemos asegurar que los puntos D, G son armónicos respecto al segmento BC.

$$\frac{DB}{DC} = \frac{GB}{GC}.$$

La tercera figura muestra una cuaterna ya estudiada en el teorema de la bisectriz: si D, E son los puntos de corte de las bisectrices interior y exterior de A, entonces $\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC}$.

Finalmente, la cuarta figura muestra una inversión respecto a una circunferencia. Si C es un punto del diámetro AB de una circunferencia de centro O, y T es uno de los puntos de corte de la circunferencia con la perpendicular por C al diámetro, entonces la tangente por T corta a AB en un punto D que es el *inverso* de C, ya que verifica $OC.OD = OA^2$. Comprobar esa relación. Además, por propiedades de los ángulos inscritos y centrales se tienen los ángulos indicados, lo que permite deducir que $C\widehat{T}B = \alpha$, es decir, TB es bisectriz del ángulo $C\widehat{T}D$, luego TA es la bisectriz exterior, y $[A, B, C, D]$ resulta ser una cuaterna armónica.

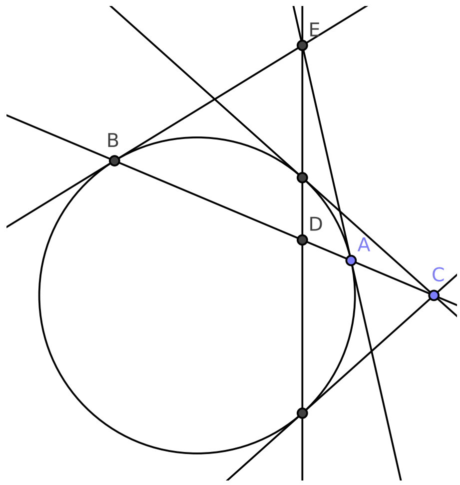
Hay otra situación en la cual aparecen cuaternas armónicas.

Recta polar de un punto respecto a una circunferencia

Si el punto está en la circunferencia, su polar es la tangente. Si el punto es exterior, su polar se define como la recta que une los puntos de contacto de las tangentes trazadas desde el punto. Si el punto es interior, podremos definir su polar cuando conozcamos la propiedad de pertenencia recíproca: si un punto está en la polar de otro, el otro está en la polar del uno.

Teorema 1.7 (Pertenencia recíproca punto-polar) *Dados dos puntos A, B y una circunferencia, A pertenece a la polar de B si y sólo si B pertenece a la polar de A.*

En la figura, los puntos C, E están cada uno en la polar del otro.

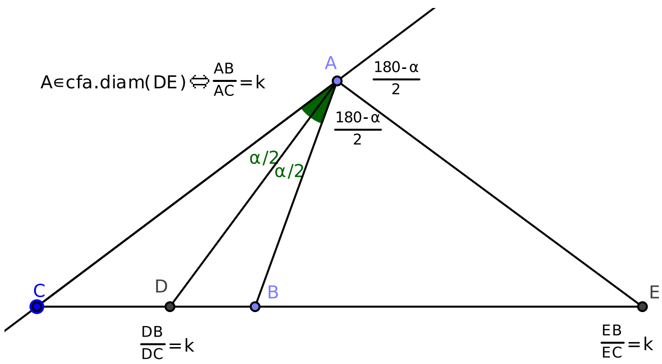


Ahora tenemos una nueva fuente de cuaternas armónicas.

Teorema 1.8 *Sean C, D puntos tales que cada uno está en la polar del otro respecto a una circunferencia. Si la recta CD corta a la circunferencia en A, B, entonces A, B, C, D es una cuaterna armónica.*

1.6. Circunferencia de Apolonio

Teorema 1.9 (Circunferencia de Apolonio) *Sea BC un segmento fijo, y $k > 0$ un número real. El lugar geométrico de los puntos A que verifican $\frac{AB}{AC} = k$ es una circunferencia de diámetro D, E, siendo D, E los puntos de la recta BC que verifican $\frac{DB}{DC} = k = \frac{EB}{EC}$, uno interior y otro exterior al segmento BC.*



Dem. Si A cumple la condición $\frac{AB}{AC} = k$, por el teorema de la bisectriz sabemos que las bisectrices interior y exterior del ángulo $B\widehat{A}C$ deben caer en los puntos D y E, y se ve que el ángulo $D\widehat{A}E$ es recto, es decir, A está en la circunferencia de diámetro DE.

Lo verdaderamente sorprendente de este teorema (y más difícil de demostrar), es el recíproco: si A está en la circunferencia de diámetro DE, entonces $\frac{AB}{AC} = k$.

Problema 1.10 (Aplicar Apolonio en ejercicios) - *Si B, C, D, E es una cuaterna armónica y $D\widehat{A}E = 90$, entonces AD es la bisectriz del ángulo $B\widehat{A}C$.*

1.7. Suma y resta de cuadrados

Teorema 1.11 (Teorema de la mediana) *Si a, b, c son las longitudes del triángulo ABC y AM es una mediana, se tiene $\boxed{AM^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}}$. (Intentar demostrarlo utilizando el teorema del coseno en ABC para calcular el coseno de β, y ese coseno calculado utilizarlo en el triángulo ABM donde se conocen $AB = c, BM = a/2$ y el ángulo en B)*

Observar que si $AC^2 + AB^2$ (o sea $b^2 + c^2$) es constante, entonces la mediana AM^2 es constante. Conclusión: el lugar geométrico de los puntos A tales que $AB^2 + AC^2 = constante$ es una circunferencia de centro en el punto medio de BC. Aplicación: Si P, Q son puntos tales que $PB^2 + PC^2 = QB^2 + QC^2$, entonces P, Q equidistan del punto medio de BC.

Resta de cuadrados = constante

Sea ABC un triángulo con altura AH. Por el teorema de Pitágoras, se tiene $AB^2 - AC^2 = BH^2 - CH^2$. Si A' es otro punto tal que $AA' \perp BC$, entonces la altura de A' sobre BC es el mismo punto H, y se tiene que $\boxed{AB^2 - AC^2 = A'B^2 - A'C^2}$. Conclusión: el lugar geométrico de los puntos A tales que $AB^2 - AC^2 = constante$ es una recta perpendicular a BC. Aplicación: si P, Q son tales que $PB^2 - PC^2 = QB^2 - QC^2$, entonces $PQ \perp BC$ (es decir, un cuadrilátero tiene las diagonales perpendiculares si y sólo si la suma de los cuadrados de los lados opuestos coincide).

1.8. Propiedades favoritas

Pueden resolverse como problemas y/o aprenderse para su posterior uso en otros problemas, ya que suelen utilizarse bastante.

1. Toda mediana en un triángulo divide a la mitad a cualquier segmento paralelo a la base: si M es el punto medio de BC y E, F son puntos en los lados AC, AB con $EF || BC$, entonces AM corta a EF en su punto medio.

2. Trapecio $BCEF$ con $BC || EF$, $P = BF \cap EC$, $Q = BE \cap CF$. Probar que PQ pasa por los puntos medios de las bases BC y EF.

3. La bisectriz de un ángulo en un triángulo corta a la circunferencia circunscrita en un punto perteneciente a la mediatriz del lado opuesto.

4. Si la bisectriz de A corta al circuncírculo de ABC en L, y el incentro de ABC es I, entonces $LB = LC = LI$.

5. El circuncentro de un triángulo rectángulo es el punto medio de la hipotenusa. En un triángulo ABC, la circunferencia de diámetro BC (y centro en su punto medio M) pasa por los pies E, F de las alturas de B y C. Hallar las inclinaciones de las rectas ME, MF.

6. Sean E, F puntos de la circunferencia de diámetro BC, y sean $H = BE \cap CF$, $A = BF \cap CE$. Entonces $AH \perp BC$ (pensar en ortocentros).

7. El trapecio $ABCD$ ($AB||CD$) es inscriptible en una circunferencia. Probar que $BC = AD$.

8. Sean O, H circuncentro y ortocentro de ABC, y M el punto medio de BC. Probar que

   a) (a) $AH = 2.OM$,

   b) (b) El simétrico de H respecto a BC está en la circunferencia circunscrita,

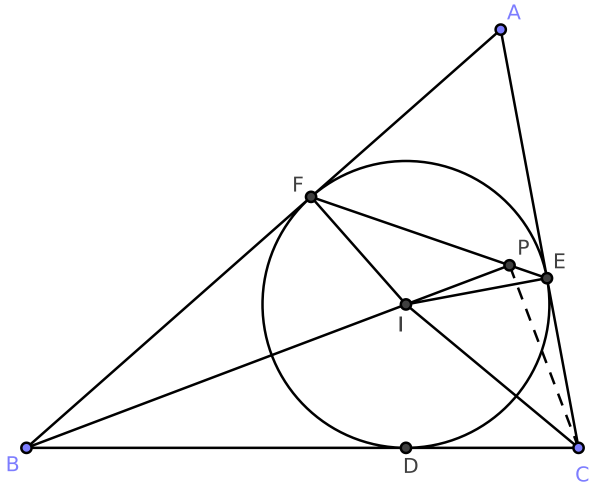
   c) (c) El simétrico de H respecto a M está en la circunferencia circunscrita.

9. En un triángulo ABC con altura AD, si $\hat{A}$ es recto entonces $DA^2 = DB \cdot DC$ (dicho de otra forma, la altura de un triángulo rectángulo es media proporcional entre los trozos en que queda dividida la base, ya que $AD = \sqrt{DB \cdot DC}$). Recíprocamente, si se sabe que $DB.DC = DA^2$ se deduce que $\hat{A}$ debe ser recto.

2. Problemas resueltos mostrando técnicas

2.1. Semejanzas y cuadriláteros inscriptibles

Problema 2.1 *En el triángulo ABC, sean D, E, F los puntos de contacto de los lados BC, CA, AB con la circunferencia inscrita. Sea I el incentro, y se construye $P = BI \cap EF$. Probar que $B\widehat{P}C = 90$.*

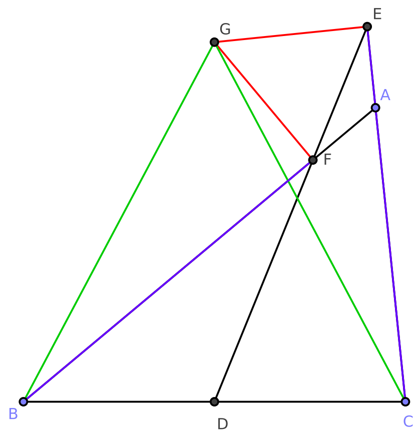


Solución. 1) Usando semejanzas: Observar que los triángulos BCI y BPF son semejantes, ya que tienen los ángulos iguales: $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$, y $90 + \frac{\alpha}{2}$. Por lo tanto, $\frac{BC}{BI} = \frac{BP}{BF}$. Relación que a su vez nos permite demostrar que los triángulos BCP y BIF son semejantes, porque tienen igual el ángulo en B ($\frac{\beta}{2}$) y los lados adyacentes proporcionales. En consecuencia, los ángulos correspondientes en P, F son iguales, lo cual prueba que $B\widehat{P}C = 90$.

2) Usando cuadriláteros inscriptibles: dado que $\widehat{IEC} = 90$, para probar que $\widehat{IPC}$ sea igual a 90 debemos ver que es inscriptible el cuadrilátero $IPEC$. La construcción de P no da ninguna pista sobre la inclinación que pueda tener la diagonal PC, luego la única forma de detectar que $IPEC$ es inscriptible es que la suma de ángulos opuestos sea 180. Ahora sale fácil.

2.2. Igualdad de triángulos y Teorema del Seno

Problema 2.2 *En un triángulo ABC con $AB > AC$, sea D el punto medio de BC. La paralela por D a la bisectriz de A corta al lado AB en F y a la prolongación del lado AC en E. Las perpendiculares por E, F a AC, AB se cortan en G. Demostrar que GD es perpendicular a BC.*



Solución. Dado que D es el punto medio de BC, será suficiente demostrar que $GB = GC$, lo cual probará que G está en la mediatriz de BC. Si esto ocurriera, como además $GE = GF$ (porque AEG y AFG son triángulos iguales), se tendría la igualdad de triángulos rectángulos BFG y CEG, lo cual sugiere una posible vía de ataque: demostrar esa igualdad de triángulos probando que $CE = BF$. Veamos en qué triángulos intervienen los segmentos "objetivo" CE, BF. BFD tiene dos ángulos $\beta, \frac{\alpha}{2}$, el tercero es $\gamma + \frac{\alpha}{2}$. Por otra parte, CED tiene ángulos $\gamma, \frac{\alpha}{2}$ y $\beta + \frac{\alpha}{2}$. Aplicando el teorema del seno en los triángulos BFD y CED se tiene:

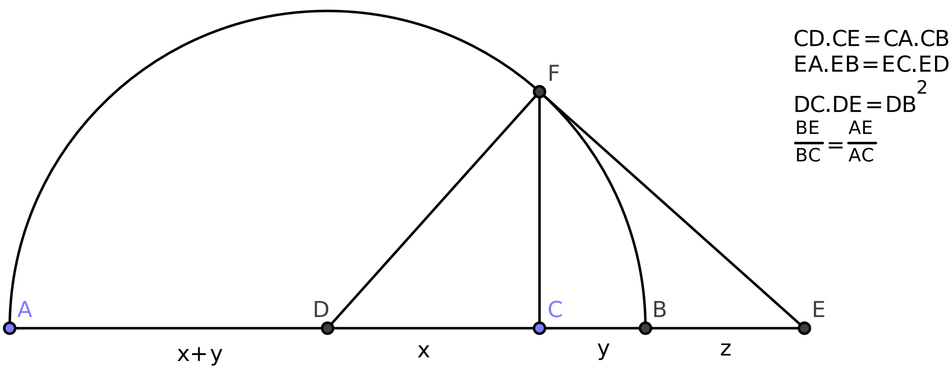
$$\frac{sen(\gamma + \frac{\alpha}{2})}{sen(\frac{\alpha}{2})} = \frac{BF}{BD}, \qquad \frac{sen(\beta + \frac{\alpha}{2})}{sen(\frac{\alpha}{2})} = \frac{CE}{CD}.$$

Los ángulos $\gamma + \frac{\alpha}{2}$ y $\beta + \frac{\alpha}{2}$ suman 180, luego tienen igual seno. Como además $BD = CD$, se concluye que $BF = CE$, como queríamos.

2.3. Aritmética de distancias entre puntos alineados

Problema 2.3 *Sea D el punto medio de un segmento AB. Desde un punto E exterior a AB se traza una tangente EF a la circunferencia de diámetro AB. Sea C la proyección de F sobre AB. Entonces se tienen las relaciones:*

$$CD.CE = CA.CB, \qquad EA.EB = EC.ED, \qquad DC.DE = DB^2, \qquad \frac{BE}{BC} = \frac{AE}{AC}.$$



Solución. Todas las relaciones admiten una demostración sencilla sin cuentas. Por ejemplo: usar la última de las "propiedades favoritas", la de la altura en un triángulo rectángulo: CF es altura común en los triángulos rectángulos ABF y DEF, eso implica que $CA.CB = CF^2 = CD.CE$. Los puntos C, E resultan ser inversos respecto a la circunferencia de diámetro AB, con lo cual A, B, C, E es una cuaterna armónica. El resto de relaciones se deduce de la potencia a los círculos de diámetro AB y CD.

La "gracia" de esta situación es que se trata de relaciones entre 5 puntos alineados, y se puede comprobar que todas las propiedades son deducibles unas de otras introduciendo las distancias:

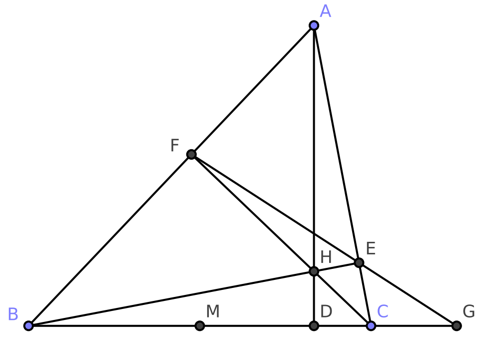
$$DC = x, CB = y, AD = x + y, BE = z$$

y viendo que en cada caso lo que queremos probar es equivalente al dato que usamos como hipótesis. De hecho, se ve que una vez simplificadas las 4 relaciones son equivalentes a $\boxed{xz = xy + y^2}$. Por ejemplo,

$$CD.CE = CA.CB \quad \Leftrightarrow \quad x(y + z) = (2x + y)y \Leftrightarrow xz = xy + y^2$$
$$EA.EB = EC.ED \quad \Leftrightarrow \quad (2x + 2y + z)z = (y + z)(x + y + z) \Leftrightarrow \cdots xz = xy + y^2$$

Muchos problemas pueden reducirse a esta situación: lo que queremos demostrar es una relación de distancias entre puntos alineados, y por otro lado sabemos que los puntos cumplen una cierta restricción, debida a una propiedad de potencia, o de cuaterna armónica ....

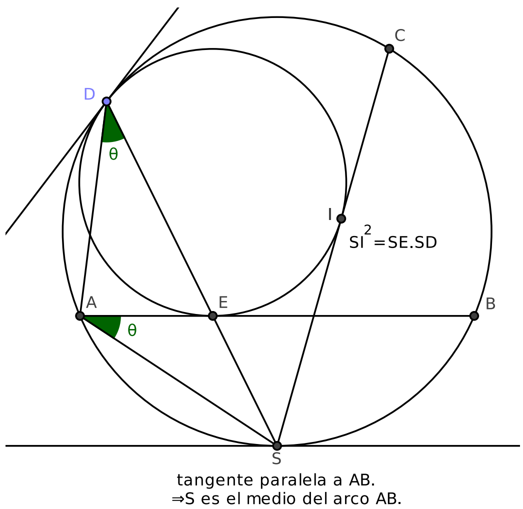
Problema 2.4 (Aplicación de esta técnica) - *En un triángulo ABC no isósceles, sean AD, BE, CF las alturas y M el punto medio de BC. Si $G = EF \cap BC$, demostrar que ME es tangente al circuncírculo de DEG.*



Solución. La condición de tangencia pedida es equivalente a $ME^2 = MD.MG$. Como M es el centro de la circunferencia de diámetro BC, tenemos que $ME = MB$, luego debemos probar que $\boxed{MB^2 = MD.MG}$, cuestión de distancias entre puntos alineados. Y lo que sabemos es que B, C, D, G forman una cuaterna armónica (estamos en la configuración típica), es decir $\boxed{\frac{GB}{GC} = \frac{DB}{DC}}$, otra cuestión de distancias en la recta BC. Aplicando la técnica anterior, se prueba que la condición conocida y la deseada son equivalentes.

2.4. Potencia y círculos tangentes

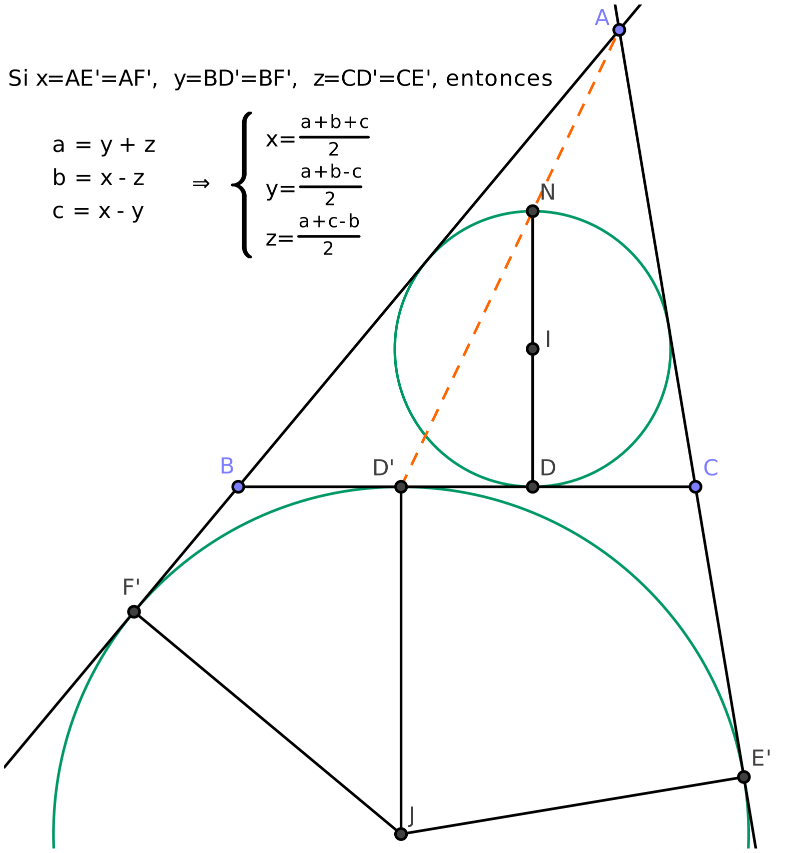
Problema 2.5 *En la figura, lo que parece ser tangente lo es. Demostrar que I es el incentro de ABC.*



Solución. Dos círculos tangentes en un punto son correspondientes por una homotecia, luego la tangente al mayor en S debe ser paralela a AB (esto también se deduce por semejanza de triángulos isósceles, haciendo intervenir los centros). Por lo tanto, S es el punto medio del arco AB, y podemos asegurar que CS es la bisectriz de $\widehat{ACB}$. Dado que I está en la bisectriz de C, para ver que es el incentro sólo falta comprobar que $SA = SI$. Veámoslo: Por potencia desde S al círculo pequeño se tiene $\boxed{SI^2 = SE.SD}$. Por otra parte, se tiene la igualdad de ángulos $\widehat{SAB} = \widehat{ADS}$ porque inscriben arcos iguales $BS = AS$, por lo tanto SA es tangente a la circunferencia que pasa por A, D, E, y nuevamente aplicando potencia se tiene que $\boxed{SA^2 = SE.SD}$, confirmando que $SA = SI$, como queríamos demostrar.

2.5. Homotecia y círculos tangentes

Problema 2.6 *ABC triángulo. En el lado BC, sean M el punto medio, D el punto de contacto con la circunferencia inscrita y D' el simétrico de D respecto a M. Si N es el simétrico de D respecto al incentro I, entonces A, N, D' están alineados.*



El truco está en observar que D' es justamente el punto de contacto de la circunferencia "exinscrita" tangente al lado BC y a las prolongaciones de AB y AC. Esto es una cuestión de distancias: los puntos D, D' son simétricos en el segmento BC por ser $CD = \frac{a+b-c}{2} = BD'$ (*). Además, en la homotecia de centro A que lleva la circunferencia inscrita en la exinscrita, se tiene que N, D' son correspondientes por pertenecer a radios paralelos (o por tener tangentes paralelas, o por semejanza de triángulos $AIN \cong AJD'$). Esto confirma que A, N, D' están alineados.

(*) En realidad no hace falta realizar ese cálculo de distancias para probar que D, D' son puntos simétricos en el segmento BC. Se puede demostrar que $BD' = CD$ a partir de semejanza de triángulos: observar que en los triángulos BDI, CDI, $BD'J$ y $CD'J$ aparecen los ángulos 90, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$, $90 - \frac{\beta}{2}$ y $90 - \frac{\gamma}{2}$. Estableciendo las semejanzas adecuadas se prueba que $\frac{BD'}{D'C} = \frac{CD}{DC}$, o sea que en el segmento BC, D' cae en la misma posición que D en ese mismo segmento orientado en sentido contrario.

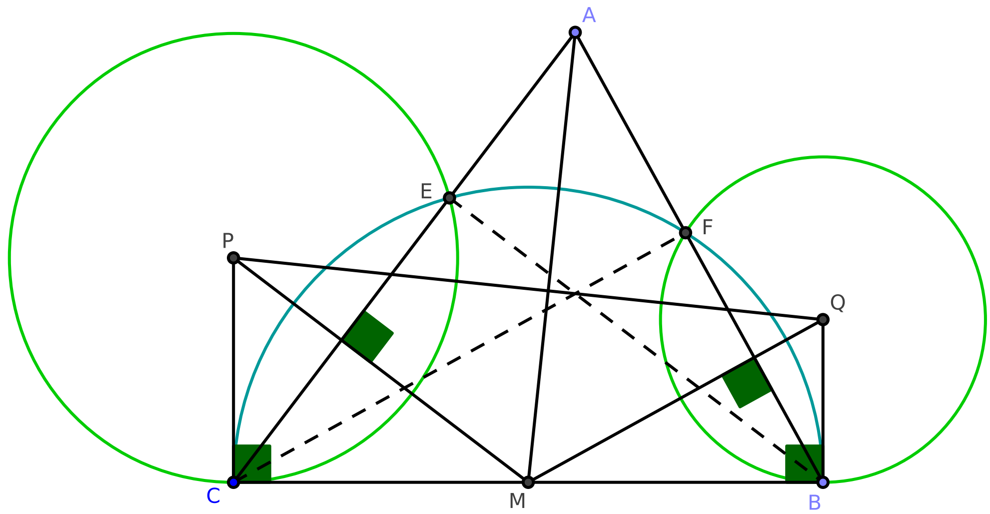
2.6. Eje radical vs. resta de cuadrados

Problema 2.7 *En el triángulo ABC, M es el punto medio de BC y se consideran puntos P, Q con las propiedades*

$$PC \perp BC,\ PM \perp AC,\ QB \perp BC,\ QM \perp AB.$$

Demostrar que PQ es perpendicular a AM.

Solución.



(i) Origen del problema: Si trazo las alturas BE, CF, se ve que MP y MQ son las mediatrices de CE, BF, luego P y Q son los centros de circunferencias tangentes a la recta BC y que pasan por C, E y por B, F. El punto M tiene igual potencia a ambas circunferencias porque $MC^2 = MB^2$. Por otra parte, las potencias desde A a los dos círculos son $AC.AE$ y $AB.AF$, cantidades iguales porque $BCEF$ es inscriptible en la circunferencia de diámetro BC. Por lo tanto, la recta AM es el eje radical de las dos circunferencias, y debe ser perpendicular a la recta PQ que une sus centros.

(ii) Soluciones alternativas (feas): Con trigonometría "moderada" se puede estudiar la relación entre las pendientes de AM y PQ .... O se puede resolver por Geometría Analítica.

(ii) Solución alternativa (más bonita): Se utiliza la siguiente propiedad: dados dos puntos fijos U, V, el lugar geométrico de los puntos X tales que $XU^2 - XV^2 =$ constante, es una recta perpendicular a UV. En particular, XY es perpendicular a UV si y sólo si $XU^2 - XV^2 = YU^2 - YV^2$ (esto asegura que las perpendiculares de X, Y a la recta UV caen en el mismo punto).

Aplicaremos esta propiedad al derecho y al revés:

$$\begin{aligned}
AP^2 - AQ^2 &= AP^2 - AM^2 + AM^2 - AQ^2 \\
&= CP^2 - CM^2 + BM^2 - BQ^2 \\
&= CP^2 - BQ^2 \\
MP^2 - MQ^2 &= CM^2 + CP^2 - BM^2 - BQ^2 \\
&= CP^2 - BQ^2.
\end{aligned}$$

3. Problemas básicos para entrenar

3.1. Entrenamiento específico de semejanzas y cuadriláteros inscriptibles

1. ABC es un triángulo rectángulo en C con $BC = 3 \cdot AC$. Sean D, E los puntos que dividen al lado BC en tres partes iguales. Demostrar que $\boxed{\widehat{AEC} + \widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 90}$.

2. Sea K el punto medio del lado AB en el cuadrado $ABCD$ y sea L el punto que divide a la diagonal AC en la proporción $AL : LC = 3 : 1$. Probar que $\widehat{KLD}$ es un ángulo recto.

3. En el triángulo ABC, sea h la altura de A y sea $a = BC$. Sea $PQRS$ un cuadrado con los vértices P, Q sobre los lados AB, AC y R, S en BC. Expresar la longitud del lado del cuadrado en función de a y de h.

4. Sean a, b $(a > b)$ las longitudes de AD, BC, bases de un trapecio $ABCD$.

   a) Hallar la longitud del segmento contenido en la paralela media entre las dos diagonales.

   b) Calcular la longitud del segmento MN cuyos extremos dividen AB y CD en las razones $AM : MB = DN : NC = p : q$.

5. Probar que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero son vértices de un paralelogramo. ¿Para qué cuadriláteros es este paralelogramo un rectángulo, un rombo o un cuadrado?

6. En el paralelogramo $ABCD$ está inscrito otro paralelogramo $A'B'C'D'$ $(A' \in AB, B' \in BC, etc.)$ Probar que los centros de los dos paralelogramos coinciden.

7. El punto K está en la diagonal BD del paralelogramo $ABCD$. AK corta a BC y CD en puntos L, M respectivamente. Probar que $AK^2 = LK \cdot KM$.

8. $ABCD$ es inscriptible un círculo de diámetro AC. Probar que las longitudes de las proyecciones de dos lados opuestos sobre BD son iguales.

9. Un triángulo tiene lados de longitudes a, a, b. Calcular el circunradio.

10. Una recta que pasa por el vértice A del cuadrado $ABCD$ corta al lado CD en E y a la recta BC en F. Probar que $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AB^2}$.

11. Sean s, t dos rectas paralelas y tangentes a un mismo círculo de radio r. Una tercera tangente al círculo en T corta a s, t en A, B. Demostrar que el producto $TA.TB$ es constante e igual a r^2.

12. Un círculo (G) está inscrito en el trapecio $ABCD$ $(BC||AD)$. (G) es tangente a los lados AB, CD en K, L y a las bases AD, BC en M, N respectivamente. Si $Q = BM \cap AN$, probar que $AK.KB = CL.LD$.

13. Los ángulos α, β del triángulo ABC verifican $3\alpha + 2\beta = 180$. Probar que $a^2 + bc = c^2$.

14. Demostrar que todos los ángulos formados entre los lados y las diagonales de un $n-$ágono regular son múltiplos enteros de $\frac{180}{n}$.

15. El incentro y el circuncentro de ABC son simétricos respecto al lado AB. Hallar los ángulos de ABC.

16. En el triángulo ABC, hallar las inclinaciones de las rectas que conectan vértices con el circuncentro.

17. ABC tiene circuncentro O y altura AD. Probar que $\widehat{BAD} = \widehat{OAC}$.

18. Dos circunferencias se cortan en K y M. AB, CD son rectas que pasan por M, K respectivamente: cortan al primer círculo en A, C y al segundo en B, D. Demostrar que $AC||BD$.

19. AM y BN son medianas en ABC. Si $\widehat{CAM} = \widehat{CBN}$, probar que $AC = BC$.

20. A, B, C, D están en un círculo, en ese orden. Sea M el punto medio del arco AB. Las cuerdas MC, MD cortan a AB en E, K. Demostrar que el cuadrilátero $KECD$ es inscriptible.

21. Considerar un triángulo equilátero. Un círculo de radio igual a la altura del triángulo se desliza siendo tangente al lado BC y corta a los segmentos AB, AC en los puntos E, F. Demostrar que el arco EF siempre es igual a 60^o (ángulo central).

22. $ABCD$ es un trapecio isósceles con lados laterales $AD = BC$, y está inscrito en un círculo de centro O. Las diagonales se cortan en P. Probar que O está en el circuncírculo de ADP (y por simetría, en el de BCP).

23. A, B, C, D están en un círculo en ese orden. A', B', C', D' son los puntos medios de los arcos AB, BC, CD, DA respectivamente. Probar que $A'C' \perp B'D'$.

24. En el arco BC de la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero ABC se elige un punto P. Si $AP \cap BC = Q$, demostrar que $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.

3.2. Variados

1. ABC es un triángulo rectángulo en B. En su exterior se construye otro triángulo ACD semejante y rectángulo en C. Sea M el punto medio de BC. Demostrar que AM es perpendicular a BD.

2. La tangente en A a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC corta a la prolongación del lado BC en un punto G. Los puntos D, E, F están sobre los segmentos BC, CA, AB respectivamente de forma que $AFDE$ es un rombo. Probar que la recta EF pasa por G.

3. En el triángulo ABC, las bisectrices de B, C cortan a los lados AC, AB en E, F respectivamente. La simetría de centro E transforma C en G.

   Demostrar que si el ángulo $\widehat{CFG}$ es recto, entonces $AB = AC$.

4. En el triángulo ABC, la bisectriz de B corta a la mediana CK en un punto L. Sea M el simétrico de L respecto a K. La recta por K paralela a BC corta a la recta AM en N. Demostrar que $\widehat{ANB}$ es un ángulo recto.

5. Sobre un arco de circunferencia que pasa por A y B se eligen dos puntos arbitrarios C, D. Sean H, I los ortocentros de ABC y ABD respectivamente. Demostrar que $CHID$ siempre es un paralelogramo.

6. En un triángulo acutángulo ABC con circuncentro O, la recta AO corta a la mitad a la altura de B. Demostrar que OB corta a la mitad a la altura de A.

7. Sea ABC un triángulo en el cual el ortocentro es el punto medio de la altura de C. Demostrar que las rectas que unen A, B con el circuncentro pasan por los puntos medios de las alturas de B, A respectivamente.

8. Sea A un punto de la recta r paralela al segmento BC. M es el punto medio de BC. Por un punto Q variable en el segmento CM, se traza una paralela a AM que corta a las rectas AC en X, a r en Y y a AB en Z. Demostrar que Y es el punto medio de XZ.

9. Sea ABC un triángulo equilátero (en sentido horario), y sea Γ la circunferencia de centro A que pasa por B. Sea D un punto sobre Γ. La recta perpendicular a CD por B corta a Γ en otro punto E. Considerar otros dos triángulos equiláteros CEF y DBG (orientados en el mismo sentido que ABC). Demostrar que GF es paralela a BC.

10. Sean $(G), (G')$ dos circunferencias que se cortan en P y Q. Una recta variable r pasa por P y vuelve a cortar a (G) en A y a (G') en B. Sea Y el punto medio de AB, X la intersección de QY con (G), y Z la intersección de QY con (G'). Probar que Y es el punto medio de XZ.

11. En el cuadrilátero $ABCD$ inscriptible en una circunferencia, las bisectrices de A y de C son paralelas. Demostrar que AC es un diámetro de la circunferencia.

4. Problemas más avanzados

4.1. Enunciados

Problema 4.1 *Sobre una circunferencia de dámetro AB se consideran puntos E, F simétricos respecto a AB. Sean H, U, V puntos en EF, BE, BF tales que $UBVH$ es un paralelogramo. Demostrar que AH es perpendicular a UV.*

Problema 4.2 *Las alturas AD y BE del triángulo ABC se cortan en H. M es el punto medio de BC y B' es el simétrico de B respecto a D. Demostrar que E, H, M, B' están en una misma circunferencia.*

Problema 4.3 *En el triángulo acutángulo ABC, las alturas BE y CF se cortan en H, y sea $G = EF \cap BC$ (suponer ABC no isósceles). EL semicírculo de diámetro BC que contiene a EF corta a AH en I. Demostrar que GI es tangente al semicírculo.*

Problema 4.4 *En el triángulo acutángulo ABC, las alturas son AD, BE, CF y M es el punto medio de BC. Las perpendiculares por E, F a EF, BC cortan a MF, ED en P, Q respectivamente. Demostrar que $PQ||BC$.*

Problema 4.5 *Sea (G) una circunferencia y PQ una cuerda tal que las tangentes en sus extremos se cortan en un punto C. La paralela a CQ por P corta a (G) en otro punto B distinto de P. La recta BC corta a PQ en D y a (G) en otro punto $A \neq B$. Demostrar que AP pasa por el punto medio de CQ.*

Problema 4.6 *Sea ABC un triángulo acutángulo con circuncentro O, y se trazan dos círculos: Γ_1 pasa por A, B y es tangente a AC; Γ_2 pasa por A, C y es tangente a AB. Si $R \neq A$ es el segundo punto de corte de Γ_1 y Γ_2, demostrar que $\widehat{ARO}$ es un ángulo recto.*

Problema 4.7 *Dos circunferencias Γ_1 y Γ_2 de centros O_1, O_2 son tangentes exteriormente en un punto P, siendo t la tangente común. Se eligen puntos A, C en Γ_1, Γ_2 de manera que los segmentos O_1A y O_2C son paralelos (O_1O_2CA conexo). La recta AC corta a Γ_2 en otro punto D. Demostrar que la tangente a Γ_1 por A y la tangente a Γ_2 por D se cortan en un mismo punto de la recta t.*

Problema 4.8 *En el triángulo ABC, las alturas AD, BE, CF se cortan en H y M es el punto medio de BC. Se construyen P, Q tales que $PC \perp BC$, $PM \perp AC$, $QB \perp BC$, $QM \perp AB$. Demostrar que: (i) DA es la bisectriz del ángulo $\widehat{PDQ}$; (ii) PQ es perpendicular a AM; (iii) PQ pasa por H.*

Problema 4.9 *Sea t la tangente a una circunferencia de diámetro AB en un punto C distinto de A, B. La proyección de C sobre AB es D, y la proyección de D sobre t es E. Demostrar que ED es la bisectriz del ángulo $\widehat{AEB}$.*

Problema 4.10 *En un triángulo ABC no isósceles, sean AD, BE, CF las alturas y M el punto medio de BC. Si $G = EF \cap BC$, demostrar que ME es tangente al circuncírculo de DEG.*

Problema 4.11 *Sean D, E, F los puntos de contacto de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC con los lados EF, FD, DE respectivamente. Sean G el punto medio de DE y H el punto de corte de DE con CF. Demostrar que el circuncírculo del triángulo FGH es tangente a AB.*

Problema 4.12 *Las alturas AD, BE, CF de un triángulo ABC acutángulo no isósceles se cortan en H. Sea M el punto medio de BC. Se construyen $G = EF \cap BC$ y $J =$ el punto de corte del segmento AD con la circunferencia de diámetro BC. Demostrar que: (i) H es el ortocentro del triángulo AMG; (ii) GJ es tangente a la circunferencia de diámetro BC.*

Problema 4.13 *En el triángulo acutángulo ABC con altura AD y otrocentro H, M es el punto medio de BC. Se construye I tal que $HI \perp AM$ y $DI||AM$. Demostrar que ID es la bisectriz del ángulo $\widehat{BIC}$.*

Ahora unos problemitas de Po-Shen Loh de entrenamiento para el equipo de EEUU, mezclados con otros de diversas fuentes, varios incluso míos.

Problema 4.14 *En el cuadrilátero $ABCD$ inscriptible, sean $E = AC \cap BD$, $F = AD \cap BC$. Demostrar que las bisectrices de los ángulos $\widehat{AEB}$ y $\widehat{AFB}$ son paralelas.*

Problema 4.15 *Sea ABC un triángulo acutángulo con circuncentro O. Sea S el círculo por A, B, O. Las rectas CA, CB cortan a S nuevamente en P, Q respectivamente. Probar que CO y PQ son perpendiculares.*

Problema 4.16 *La circunferencia inscrita en el triángulo ABC toca a los lados BC, CA, AB en D, E, F. La perpendicular por D a BC corta a EF en G. Demostrar que G está en la mediana que parte de A.*

Problema 4.17 *ABC triángulo acutángulo. La circunferencia de diámetro AB corta a la altura CF y a su extensión en puntos M, N, y la circunferencia de diámetro AC corta a la altura BE y su extensión en P, Q. Demostrar que M, N, P, Q están en un mismo círculo.*

Problema 4.18 *Un círculo S de centro O corta a otro círculo S' en A y B. Sea C un punto en el arco de S contenido en S'. Sean E, D los segundos puntos de intersección de S' con las rectas AC, BC respectivamente. Demostrar que $DE \perp OC$.*

Problema 4.19 *Sean w_1, w_2 dos circunferencias de igual radio que se cortan en B y C. Sea A un punto de w_1. Las rectas AB, AC cortan a w_2 en A_1 y A_2. Sea X el punto medio de BC. A_1X y A_2X cortan w_1 en P_1 y P_2. Probar que $AP_1 = AP_2$.*

Problema 4.20 (Teorema de Steiner-Lehmus) *En el triángulo ABC, los segmentos bisectrices son AD, BE, CF. Demostrar que si dos de estos segmentos son iguales, el triángulo es isósceles.*

Problema 4.21 *Sea ABC un triángulo. La bisectriz de A corta al lado BC en X. La perpendicular a AX por X corta a AB en Y. La perpendicular a AB por Y corta a AX en R. XY corta a la mediana de A en S. Probar que RS es perpendicular a BC.*

Problema 4.22 *Sea $ABCD$ un cuadrilátero con diagonales AC, BD perpendiculares, inscriptible en una circunferencia de centro O. Probar que los cuadriláteros $AOCD$ y $AOCB$ tienen igual área.*

Problema 4.23 *Sea ABC un triángulo cuyas bisectrices AD, BE cortan a la recta por C paralela a AB en F, G respectivamente. Demostrar que si $EG = DF$, entonces $CA = CB$.*

Problema 4.24 *Sea O el circuncentro de un triángulo acutángulo ABC con $AB = BC$. Sea M un punto del segmento BO, y M' el simétrico de M respecto al punto medio del lado AB. Sea $K = M'O \cap AB$. L es el punto del lado BC tal que $\widehat{CLO} = \widehat{BLM}$. Probar que O, K, B, L están en una misma circunferencia.*

Problema 4.25 *Sea ABC un triángulo acutángulo, y S el círculo que pasa por el circuncentro O y por los vértices B, C. Sea OK un diámetro de S, y sean D, E los segundos puntos de intersección de S con AB, AC respectivamente. Demostar que $ADKE$ es un paralelogramo.*

Problema 4.26 *Sea I el incentro del triángulo ABC. La circunferencia (G) es tangente a la bisectriz AI en I y al lado BC. Demostrar que (G) es tangente a la circunferencia circunscrita de ABC.*

Problema 4.27 *En un triángulo ABC con $AC > AB$, AD es bisectriz, AM es mediana y BE altura. La bisectriz exterior de A corta a la prolongación de BC en F. Demostrar que el circuncírculo del triángulo DEF es tangente a la recta ME.*

Problema 4.28 *ABC triángulo isósceles con $AB = AC$. Un círculo tangente al circuncírculo también es tangente a AB y AC en P y Q. Demostrar que el punto medio de PQ es el incentro del triángulo ABC.*

4.2. Algunas sugerencias y pistas

Advertencia: están mal los números, como hay huecos (problemas sin sugerencias), la numeración no se corresponde con la de los enunciados, y me da pereza revisar a ver qué pista se asocia a cuál problema.

Sugerencia 4.1 *Llamar O al punto medio de AB y demostrar que U, V son correspondientes por una rotación de centro O que lleva E en B y B en F, con lo cual $UV \perp OM$, siendo $M = UV \cap HB$, y observar que $OM||AH$. Alternativamente, prolongar HU, HV hasta cortar a AE, AF en U', V'. Demostrar que H es el ortocentro de $AU'V'$ y que $UV||U'V'$ (se requieren las semejanzas $HUE \cong HVF, HU'E \cong UV'F$).*

Sugerencia 4.2 *Definir $M = AP \cap CQ$ y trabajar con aritmética de ángulos hasta demostrar que los triángulos ACM y CPM son semejantes. Utilizar esta semejanza y la potencia de M al círculo.*

Sugerencia 4.3 *Intentar dos demostraciones: (i) utilizando los centros P, Q, demostrar que $APOQ$ es un paralelogramo y utilizar que A, R son simétricos respecto a PQ; (ii) razonando con ángulos, probar que R y O están en un mismo arco de circunferencia que pasa por BC, lo cual dará pistas sobre la inclinación de la recta OR.*

Sugerencia 4.4 *Llamar t_1, t_2 a las tangentes. Para completar la simetría de la figura, construir B, el otro punto de corte de AD con Γ_1. Utilizar una homotecia que lleva Γ_1 en Γ_2 (y A, B en C, D) para demostrar que t_1 y t_2 forman ángulos iguales con la recta AC.*

Sugerencia 4.5 *Todas las propiedades son expresables mediante relaciones entre las longitudes PC, HD, QB y las distancias entre los puntos C, M, D, B. Por otra parte, hay "un porrón" de triángulos rectángulos semejantes con ángulos β o γ. Con estas semejanzas y operando un poco se consiguen las relaciones buscadas.*

Sugerencia 4.6 *Construir O = punto medio de AB, $G = t \cap AB$ (si $t||AB$ el problema es trivial), y $H = ED \cap$ mediatriz de AB. Demostrar que $DA.DB = DC^2 = DO.DG = DE.DH$ para deducir que $AEBH$ es inscriptible. Alternativamente, demostrar que $GA/GB = DA/DB$ y utilizar la circunferencia de Apolonio...*

Sugerencia 4.7 *Es suficiente probar que $ME^2 = MD.MG$, o de forma equivalente $MB^2 = MD.MG$. Usar que $GB.GC = GE.GF = GM.GD$ (potencia de G a la circunferencia de diámetro BC y a la de los 9 puntos).*

Sugerencia 4.8 *Definir $J = DE \cap AB$ y demostrar que $DEHJ$ es una cuaterna armónica. Transformar $\frac{JD}{JE} = \frac{HD}{HE}$ en una relación $JE.JD = JG.JH$, y utilizar que $JE.JD = JF^2$.*

Sugerencia 4.9 *(i) Sea I la proyección de H sobre AM. Probar que G tiene igual potencia a los círculos de diámetros AH y HM (usar que $DMEF$ es inscriptible). (ii) Demostrar que los círculos de diámetros BC, MI tienen una tangente común en J, y que G tiene igual potencia a ambos círculos.*

Sugerencia 4.10 *Construir $G = HI \cap BC$ (si G no existe el problema es trivial) y $J = DI \cap$ la mediatriz de BC. Observar que H es el ortocentro de los triángulos ABC y AMG. Probar que $DB.DC = DH.DA = DM.DG = DI.DJ$ y concluir que $BICJ$ es inscriptible.*