Preparación para la Olimpíada Matemática Española 2013
DESIGUALDADES

Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León

Documento 2, enero de 2013

Resumen

Estas notas están inspiradas en el excelente documento "Basics of Olympiad Inequalities", de Samin Riasat, disponible en Internet: http://aam.org.in/st_material/14.pdf . Muchos de los problemas y soluciones son de dicho documento. Resolver desigualdades olímpicas no es tan difícil, son sólo 300 trucos que se van repitiendo sistemáticamente. Imprescindible para resolver un Problema 1 o 4 de una Olimpíada: dominar bien la desigualdad de las medias, algunos trucos elementales, y trabajar con restricciones. Muy recomendable para defenderse ante un Problema 2 o 5: Cauchy-Schwarz y reordenación. Menos urgente: Chebyshev y Hölder, aunque apenas supone un esfuerzo extra si ya se saben Cauchy y reordenación. Para pelear un Problema 3 o 6: Schur y Jensen. Y además de técnica..., ..., bastante (a + sue)rte.

Orden sugerido de estudio: secciones obligatorias 1.1, 1.2, 4.1, 4.2, 2.1, 3.1, menos urgentes 2.2, 3.2, optativas 1.4, 5.1, 5.2. Y muchos ejercicios.

Índice

1. Desigualdades de las medias

1.1. Media aritmética vs. geométrica

La desigualdad más conocida y utilizada es la de las medias aritmética y geométrica. Sin ella no se puede saltar al terreno de juego.

Teorema 1.1 (Media aritmética $\geq$ media geométrica) *Dados dos números $a, b \geq 0$, se define su media aritmética como $\frac{a+b}{2}$ y su media geométrica como $\sqrt{ab}$. Entonces, $\boxed{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}}$, y la igualdad ocurre si y sólo si $a = b$. De forma general, para n números no negativos se tiene*

$$\boxed{\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}, \qquad \textit{(y la igualdad ocurre si } a_1 = a_2 = \cdots = a_n\textit{)}$$

Dem. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$, lo cual se cumple siempre. La igualdad sólo puede ocurrir si $a = b$. El caso $n > 2$ requiere una demostración distinta (por inducción).

Problema 1.2 *Demostrar que la suma de un número positivo y su inverso es ≥ 2.*

Problema 1.3 *Si $a, b, c \geq 0$, demostrar que $(ab + bc + ca)^3 \geq 27a^2b^2c^2$.*

Problema 1.4 *Si a, b son positivos, probar que $a^2 + b^2 > 2ab$, $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$, y en general, $a^{n+1} + b^{n+1} \geq a^n b + ab^n$ para todo entero positivo n.*

Solución. Demostraremos el caso $n = 3$ utilizando la desigualdad de las medias:

$$\left.\begin{array}{r} a^4 + a^4 + ab^3 \geq 3\sqrt[3]{a^4a^4ab^3} = 3\sqrt[3]{a^9b^3} = 3a^3b \\ b^4 + b^4 + ba^3 \geq 3\sqrt[3]{b^4b^4ba^3} = 3\sqrt[3]{b^9a^3} = 3b^3a \end{array}\right\} \Rightarrow 2(a^4 + b^4) + (a^3b + ab^3) \geq 3(a^3b + ab^3),$$

luego $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$, como queríamos demostrar.
Advertencia y regla de oro: El signo $\geq$ tiene la propiedad transitiva. Para demostrar $A \geq B$, podemos demostrar que $A \geq C \geq B$. Pero debemos estar dispuestos a soportar ... admitir que no es fácil encadenar satisfactoriamente más de una desigualdad. Por ejemplo, para demostar que $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$, no podemos empezar acotando $2(a^2+b^2) \geq 4ab$ porque $4ab \not\geq (a+b)^2 \ldots$

Problema 1.5 *Dados los números reales a, b, c, demostrar que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Pista: utilizar acotaciones del tipo $a^2 + b^2 \geq 2ab, \ldots$*

Dados dos números $a, b \geq 0$, se define su media armónica como el inverso de la media aritmética de sus inversos, es decir $H = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. Para n números, $H = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$.

Teorema 1.6 (Media armónica) *La media geométrica es $\geq$ la media armónica.*

Dem. Por la desigualdad de las medias, $\frac{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdots \frac{1}{a_n}}$. Al invertir cambia el sentido de la desigualdad.

Teorema 1.7 (Desigualdad de las medias con pesos) *Dados $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ y una sucesión de "pesos" $w_1, \ldots, w_n$ con suma $1 = \sum w_i$, se tiene:*

$$\boxed{w_1a_1 + \cdots + w_na_n \geq a_1^{w_1} \cdots a_n^{w_n}}$$

Si no se impone la condión de suma 1: $\boxed{\frac{w_1a_1+\cdots+w_na_n}{w_1+\cdots+w_n} \geq \left(a_1^{w_1}\cdots a_n^{w_n}\right)^{\frac{1}{w_1+\cdots+w_n}}}$

Observar que si todos los pesos son iguales $w_i = \frac{1}{n}$, se tiene la desigualdad ya conocida. Veamos un ejemplo para tres números a, b, c con pesos $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$.

$$a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{2}{6}} c^{\frac{3}{6}} = \left(ab^2c^3\right)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{abbccc} \leq \frac{a+b+b+c+c+c}{6} = \frac{1}{6}a + \frac{2}{6}b + \frac{3}{6}c$$

Si los pesos w_i del teorema anterior son números racionales, la técnica ilustrada en el ejemplo permite demostrar la desigualdad, sin más que expresar las fracciones con un denominador común. Si los pesos son irracionales, la desigualdad se demuestra con técnicas que sobrepasan el contenido de estos apuntes.

Problema 1.8 *Si $a, b, c \geq 0$, demostrar que $a^2b+b^2c+c^2a \leq a^3+b^3+c^3$. Pista: usar acotaciones del estilo $a^2b = \sqrt[3]{a^3a^3b^3} \leq \frac{a^3+a^3+b^3}{3} \ldots$ o proceder como en el Problema 1.4.*

1.2. Fuerza bruta

Muchas veces lo primero que se nos ocurre para demostrar una desigualdad es eliminar denominadores y transformarla en una desigualdad equivalente del tipo *unpolinomio* $>$ *otropolinomio*. A menudo estos polinomios son simétricos en las variables, por ejemplo:

$$a+b+c,\ a^2+b^2+c^2,\ a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b,\ a^3+b^3+c^3,\ abc,\ \ldots$$

Sumas simétricas y sumas cíclicas.-
Utilizaremos el símbolo $\sum_{sim}$ para denotar una suma simétrica de términos “similares”, donde aparecen todas las posibles permutaciones de las variables. También es importante cuando sólo aparecen algunas permutaciones que se repiten en orden cíclico, en ese caso escribiremos $\sum$. Por ejemplo, para 3 variables a, b, c:

$$\begin{aligned} \sum a^3 &= a^3+b^3+c^3 \\ \sum_{sim} a^2b &= a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b \\ \sum a^3b &= a^3b+b^3c+c^3a \\ \sum \frac{a}{a+c} &= \frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+b} \end{aligned}$$

Al comparar dos bloques simétricos de igual grado, necesitamos un criterio para saber si alguno es siempre mayor o igual que el otro. Esto siempre es posible si la secuencia de exponentes de un bloque *mayora* a la del otro.

Sucesiones mayorantes.
Dadas dos sucesiones $\{x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k\}$, $\{y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_k\}$, decimos que $\{x_i\}$ *mayora* a $\{y_i\}$ si $x_1+\cdots+x_i \geq y_1+\cdots+y_i$ para todo $i \leq k$, y se da la igualdad para $i = k$. Por ejemplo, $(4, 2, 0)$ mayora a $(3, 2, 1)$ porque $4 \geq 3, 4+2 \geq 3+2$ y $4+2+0 = 3+2+1$.

En estas condiciones, la suma de todos los términos en 3 variables con exponentes $(4, 2, 0)$ es mayor que la suma de los términos con exponentes $(3, 2, 1)$, es decir $\sum\limits_{sim} a^4b^2 \geq \sum\limits_{sim} a^3b^2c$:

$$a^4b^2+a^4c^2+b^4c^2+b^4a^2+c^4a^2+c^4b^2 \geq a^3b^2c+a^3c^2b+b^3c^2a+b^3a^2c+c^3a^2b+c^3b^2a$$

Veamos cómo acotar uno de los términos de la derecha:

$$a^3b^2c = b^2(a^3c) = b^2\sqrt[4]{a^4a^4a^4c^4} \underbrace{\leq}_{medias} b^2(\frac{a^4+a^4+a^4+c^4}{4}) = \frac{3}{4}b^2a^4 + \frac{1}{4}b^2c^4$$

Se repite la jugada con los restantes términos y se suman todas las desigualdades. Más ejemplos de acotaciones:

$$\begin{aligned} a^3bc = (a^5)^{\frac{3}{5}}(b^5)^{\frac{1}{5}}(c^5)^{\frac{1}{5}} &\leq \frac{3}{5}a^5 + \frac{1}{5}b^5 + \frac{1}{5}c^5 \\ a^3bc = a^3(bc) &\leq a^3\left(\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2\right) = \frac{1}{2}a^3b^2 + \frac{1}{2}a^3c^2 \end{aligned}$$

Cuidado si se mezclan sumas simétricas y cíclicas! Hay que comprobar el número de términos de cada expresión: por ejemplo, $(3,0,0)$ mayora a $(2,1,0)$, pero la suma $\sum a^3$ tiene 3 términos y la suma $\sum_{sim} a^2b$ tiene 6. En este caso no se cumple $\sum a^3 \geq \sum_{sim} a^2b$ sino $2\sum a^3 \geq \sum_{sim} a^2b$.

Problema 1.9 *Demostrar que* $\boxed{\sum_{sim} a^{12}b^9c^3 \geq \sum_{sim} a^{11}b^{10}c^3}$.

Solución. $a^{12}b^9c^3 + a^9b^{12}c^3 = c^3a^9b^9(a^3+b^3) \geq c^3a^9b^9(a^2b+ab^2) = a^{11}b^{10}c^3 + a^{10}b^{11}c^3$, donde la desigualdad es consecuencia del Problema 1.4. Procediendo de forma similar con los demás términos se tiene el resultado.

Si una secuencia mayora a otra, siempre se puede pasar de una a la otra mediante una cadena de mayoraciones, en cada paso se reemplaza una pareja de exponentes $(i > j)$ por $(i-1 \geq j+1)$, y los restantes exponentes quedan fijos. Por ejemplo:

$$(12,9,3) > (11,10,3) > (11,9,4) > (11,8,5) > (11,7,6)$$

Aplicando repetidamente los resultados previos se ve que $\sum_{sim} a^{12}b^9c^3 \geq \sum_{sim} a^{11}b^7c^6$. Es sorprendente la gran cantidad de desigualdades que son "brutalizables", es decir, susceptibles de ser atacadas por fuerza bruta mediante esta técnica.

¿Y si falla la simetría o faltan términos? Para demostrar que $a^3b+b^3c+c^3a \geq abc(a+b+c)$, a pesar de que la secuencia $(3,1,0)$ mayora a $(2,1,1)$, no intervienen todos los términos de tipo $(3,1,0)$. ¿Cómo proceder en este caso? Si existieran pesos positivos x,y,z tales que $x+y+z=1$ y $a^2bc = (a^3b)^x + (b^3c)^y(c^3a)^z$, sería muy bueno porque podríamos aplicar la desigualdad de las medias con pesos y acotar $a^2bc \leq x(a^3b) + y(b^3c) + z(c^3a)$. Se debe resolver el sistema de ecuaciones que resulta de igualar los pesos de a,b,c en la igualdad $a^2bc = (a^3b)^x + (b^3c) + (c^3a)^z$, es decir, $\{3x+z=2, 3y+x=1, 3z+y=1\}$, y ver si las soluciones salen positivas ... en este caso hay suerte: $x=4/7, y=1/7, z=2/7$, podemos acotar

$$a^2bc \leq \frac{4a^3b+b^3c+2c^3a}{7}, b^2ca \leq \frac{4b^3c+c^3a+2a^3b}{7}, c^2ab \leq \frac{4c^3a+a^3b+2b^3c}{7},$$

y sumar todas las desigualdades, pero en general la técnica de las secuencias mayorantes no está garantizado que funcione cuando faltan términos.

Por otra parte, hay ocasiones en las cuales se puede demostrar una desigualdad aunque el criterio de mayoración no sea aplicable, como por ejemplo:

$$a^5b + ab^5 + 2a^3b^3 \geq 2(a^4b^2 + a^2b^4)$$

Los términos a^3b^3 tienen exponentes $(3,3)$, son "más débiles" que los de tipo $(4,2)$, sin embargo se puede incluir a los débiles en un equipo fuerte, como muestra esta sencilla aplicación de la desigualdad de las medias: $a^5b + a^3b^3 \geq 2\sqrt{a^8b^4} = 2a^4b^2$.

No siempre las desigualdades son homogéneas, por ejemplo:

Problema 1.10 *Si $x, y > 0$, demostrar que* $\boxed{\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{1}{xy}}$.

Solución. La solución más corta consiste en darse cuenta de que cada sumando es $\leq \frac{1}{2xy}$, ya que por la desigualdad de las medias se tiene $x^4 + y^2 \geq 2\sqrt{x^4y^2} = 2x^2y$, y de igual forma $y^4 + x^2 \geq 2y^2x$.

Alternativamente, si aplicamos fuerza bruta eliminando denominadores, resulta la siguiente desigualdad que hay que demostrar:

$$x^5y^2 + y^5x^2 + x^4y + y^4x \leq x^4y^4 + x^6 + y^6 + x^2y^2,$$

la cual es consecuencia de aplicar la desigualdad de las medias:

$$x^4y^4 + x^6 \geq 2x^5y^2,\ x^4y^4 + y^6 \geq 2y^5x^2,\ x^6 + x^2y^2 \geq 2x^4y,\ y^6 + x^2y^2 \geq 2y^4x.$$

1.3. Ejercicios

Problema 1.11 *Dados $a, b, c \geq 0$, probar que* $\boxed{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3}$.

Problema 1.12 *Si $a, b, c > 0$, probar que* $\boxed{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} \leq \frac{(a+b+c)^3}{27}}$.

Problema 1.13 *Si $a, b, c > 0$, entonces* $\boxed{\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6}$ *y* $\boxed{\left(\frac{a+b}{c}\right)\left(\frac{b+c}{a}\right)\left(\frac{c+a}{b}\right) \geq 8}$.

Problema 1.14 *Dados $a, b, c > 0$, demostrar que* $\boxed{3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)}$.
Para ejercicios similares de grado 2, se pueden simplificar las cuentas introduciendo las variables $P = a^2 + b^2 + c^2, Q = ab + bc + ca$ y sabiendo que $(a + b + c)^2 = P + 2Q$, $P \geq Q$.

Problema 1.15 *Dados $a, b, c > 0$, demostrar que* $\boxed{(a+b+c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc}$.

Problema 1.16 *Dados $a, b, c > 0$, demostrar que* $\boxed{\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq \frac{a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b}{6} \geq abc}$.
Para ejercicios similares de grado 3, se pueden simplificar las cuentas introduciendo las variables $P = a^3 + b^3 + c^3$, $Q = a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b$, $R = abc$ y sabiendo que $(a + b + c)^3 = P + 3Q + 6R$, $\frac{P}{3} \geq \frac{Q}{6} \geq R$.

Problema 1.17 *Si $a, b > 0$, se definen $A = a + b, B = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Probar que $A + B \geq 4$ y $AB \geq 4$.*

Problema 1.18 *Si $a, b, c > 0$, demostrar que* $\boxed{(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9}$.

Problema 1.19 *Si $a_1, \ldots, a_n > 0$, demostrar que*

$$(a_1 + \cdots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}) \geq n^2.$$

Problema 1.20 *Sean a, b, c números reales positivos. Probar que*

$$a^3 + b^3 + c^3 + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 2(a^2b + b^2c + c^2a)$$

Problema 1.21 (Desigualdad de Nesbitt) *Si $a, b, c > 0$, demostrar que*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Problema 1.22 *Si $a, b, c > 0$, probar que*

$$\frac{a^2}{2a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2}{2b^2 + (c+a)^2} + \frac{c^2}{2c^2 + (a+b)^2} \geq \frac{1}{2}.$$

1.4. (Opcional) Sucesión creciente de medias y polinomios simétricos

Teorema 1.23 (Sucesión creciente de medias) *Dados $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ y un número real $r > 0$, se define $\mu_r = \left(\frac{a_1^r + \cdots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}$. Entonces, $\boxed{\mu_r \leq \mu_s \text{ si } r \leq s}$. Por ejemplo, para tres números a, b, c y los valores de $r : \frac{1}{2} < 1 < 2 < 3$ tenemos:*

$$\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}\right)^2 \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$$

Teorema 1.24 (Generalización) *Si $r = 0$, por convenio se define μ_0 como la media geométrica. Si $r < 0$, μ_r se define exactamente igual que en el teorema anterior, y se sigue cumpliendo que $\boxed{\mu_r \leq \mu_s \text{ si } r \leq s}$.*

Algunas medias μ_r son ya conocidas: para $r = 1$ se tiene la media aritmética, para $r = 0$ la geométrica, y para $r = -1$ la armónica. La media para $r = 2$ suele denominarse *media cuadrática.*

Para ciertos elementos $a_1, \ldots, a_n$ fijos, cuando r varía entre 0 y 1 se tiene una familia infinita de medias μ_r situadas entre la geométrica y la aritmética.

La sucesión creciente de medias también admite una versión con pesos. Por ejemplo, para los números $\{a, b, c\}$ con pesos $\{a, b, c\}$ y valores de r $\{\frac{1}{2}, 1, 2\}$ tenemos:

$$\left(\frac{a(\sqrt{a})+b(\sqrt{b})+c(\sqrt{c})}{a+b+c}\right)^2 \leq \frac{a(a)+b(b)+c(c)}{a+b+c} \leq \sqrt{\frac{a(a^2)+b(b^2)+c(c^2)}{a+b+c}}$$

Utilizando pesos en otro orden, por ejemplo b, c, a, se tendría:

$$\left(\frac{b(\sqrt{a})+c(\sqrt{b})+a(\sqrt{c})}{b+c+a}\right)^2 \leq \frac{b(a)+c(b)+a(c)}{b+c+a} \leq \sqrt{\frac{b(a^2)+c(b^2)+a(c^2)}{b+c+a}}$$

Polinomios simétricos

Estos resultados que veremos para 4 variables se pueden generalizar para n variables. Consideramos el desarrollo en potencias de x del siguiente polinomio simétrico en a, b, c, d.

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + \underbrace{(a+b+c+d)}_{s_1}x^3 + \underbrace{(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}_{s_2}x^2 + \underbrace{(abc+abd+acd+bcd)}_{s_3}x + \underbrace{abcd}_{s_4}$$

Se definen los siguientes "promedios ", dividiendo cada s_i por el número de sumandos que contiene: $d_1 = \frac{s_1}{4}$, $d_2 = \frac{s_2}{6}$, $d_3 = \frac{s_3}{4}$ y $d_4 = s_4$. Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} Newton &: \; d_2^2 \geq d_1 d_3, \quad d_3^2 \geq d_2 d_4 \qquad (d_i^2 \geq d_{i-1} d_{i+1}) \\ Mc.Laurin &: \; d_1 \geq \sqrt{d_2} \geq \sqrt[3]{d_3} \geq \sqrt[4]{d_4} \end{aligned}$$

Para n números fijos $a_1, \ldots, a_n$, la sucesión de medias de Mc. Laurin están todas comprendidas entre la media aritmética d_1 y la media geométrica $\sqrt[n]{d_n}$.

2. Desigualdades de Cauchy-Schwarz y Hölder

2.1. Cauchy-Schwarz

Teorema 2.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) *Para cualesquiera números reales $a_1, \dots, a_n$ y $b_1, \dots, b_n$, se tiene que*

$$\boxed{(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2}$$

La igualdad ocurre si las sucesiones son proporcionales, es decir $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

Por ejemplo, podemos redemostrar un resultado ya conocido: $ab + bc + ca \leq (a^2 + b^2 + c^2)$. En efecto: $(ab + bc + ca)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + a^2)$

Problema 2.2 *Si a, b, c son positivos, demostrar que* $\boxed{(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)}$

Solución. $(a + b + c)^2 = (a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2) \cdot (1^2 + 1^2 + 1^2)$.

Esta desigualdad es muy útil para "sumar el contenido de las raíces", por ejemplo:

Problema 2.3 *Si $a, b, c > 0$, probar que* $\boxed{\frac{\sqrt{2a+b}+\sqrt{2b+c}+\sqrt{2c+a}}{\sqrt{a+b+c}} \leq 3}$.

Solución. Es consecuencia inmediata de lo siguiente:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \sqrt{2a + b} + 1 \cdot \sqrt{2b + c} + 1 \cdot \sqrt{2c + a} &\leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2a + b + 2b + c + 2c + a} \\ &= \sqrt{3(a + b + c)}\sqrt{3} = 3\sqrt{a + b + c} \end{aligned}$$

Problema 2.4 *Probar que* $\boxed{\sqrt{3x^2 + xy} + \sqrt{3y^2 + yz} + \sqrt{3z^2 + zx} \leq 2(x + y + z)}$

Solución. $\sum \sqrt{x(3x + y)} \leq \sqrt{\sum x}\sqrt{\sum(3x + y)} = \sqrt{(x + y + z)(4x + 4y + 4z)} = 2(x + y + z)$

Otro truco: a veces se descompone un producto en factores convenientes. Por ejemplo, para probar que $(ab + bc + ca)^2 \leq (a + b + c)(ab^2 + bc^2 + ca^2)$, se escribe ab como $\sqrt{a}\sqrt{ab^2}$, $\dots$.

A veces (no muchas) tenemos suerte y podemos resolver una desigualdad en varias etapas encadenando sucesivas acotaciones, como en el siguiente ejemplo.

Problema 2.5 *Si a, b, c son positivos, probar que* $\boxed{(a^2 b + b^2 c + c^2 a)^2 \leq \frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{3}}$

$$\begin{aligned} (a^2 b + b^2 c + c^2 a)^2 &= (a(ab) + b(bc) + c(ca))^2 \\ &\leq (a^2 + b^2 + c^2)((ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2) \\ &\leq (a^2 + b^2 + c^2)\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{3} \end{aligned}$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz admite otra formulación equivalente, que es muy útil para "sumar denominadores".

Teorema 2.6 (Cauchy-Schwarz en forma de Engel) *Para números $a_1, \dots, a_n$ arbitrarios y $b_1, \dots, b_n$ positivos,*

$$\boxed{\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + \cdots + a_n)^2}{(b_1 + \cdots + b_n)}}$$

Dem. Es consecuencia directa de aplicar la desigualdad de C-S en el momento oportuno.

$$(a_1 + \cdots + a_n)^2 = \left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}} \sqrt{b_1} + \cdots + \frac{a_1}{\sqrt{b_1}} \sqrt{b_1} \right)^2 \leq \left(\frac{a_1^2}{b_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \right) (b_1 + \cdots + b_n)$$

En los dos siguientes ejercicios resueltos se ilustra el truco de "hacer aparecer cuadrados" en los numeradores para aplicar Cauchy-Schwarz en su formulación de Engel y poder sumar los denominadores.

Problema 2.7 *Si a, b, c son positivos, demostrar que* $\boxed{\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} \geq 1}$

Solución. $\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} = \frac{a^2}{a^2+2ab} + \frac{b^2}{b^2+2bc} + \frac{c^2}{c^2+2ca} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+2ab+b^2+2bc+c^2+2ca} = 1.$

Problema 2.8 *Si a, b, c son positivos, demostrar que* $\boxed{\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2}}$

Solución. Aunque en los numeradores ya hay cuadrados, no podemos acotar $\sum \frac{a^2}{b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c}$ porque no se cumple que $(a+b+c)$ sea $\geq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$. Pero podemos hacer

$$\sum \frac{a^2}{b} = \sum \frac{a^4}{a^2 b} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2 b + b^2 c + c^2 a)} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2 \cdot \sqrt{3}}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)},$$

ya que por un ejercicio anterior sabemos que $a^2 b + b^2 c + c^2 a \leq \frac{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}}$.

Otro truco: sumar términos para obtener algo conocido o más fácil de demostrar. O restar términos para obtener números negativos y así demostrar una nueva desigualdad similar pero en el sentido opuesto. Como en el siguiente ejemplo.

Problema 2.9 *Sean a, b, c números reales positivos. Probar que* $\boxed{\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \leq 1}$.

Solución. Restando $3/2$ queda la siguiente desigualdad equivalente

$$\begin{aligned} \frac{a}{2a+b} - \frac{1}{2} + \frac{b}{2b+c} - \frac{1}{2} + \frac{c}{2c+a} - \frac{1}{2} &\leq 1 - \frac{3}{2}, \\ \text{es decir:} \quad \frac{-b}{2(2a+b)} + \frac{-c}{2(2b+c)} + \frac{-a}{2(2c+a)} &\leq -\frac{1}{2} \\ \frac{b}{2a+b} + \frac{c}{2b+c} + \frac{a}{2c+a} &\geq 1, \end{aligned}$$

que corresponde a un problema anterior permutando los nombres de las variables.

2.2. (Menos urgente) Hölder

Es una generalización de Cauchy-Schwarz. Prescindible si se dispone de poco tiempo.

Teorema 2.10 (Desigualdad de Hölder) *Sean $\{a_{ij}\}, i = 1 \ldots m, j = 1 \ldots m$ números reales positivos. Entonces*

$$\prod_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) \geq \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt[m]{a_{1j} \cdots a_{mj}} \right)^m$$

Mmhhh ... eeehh ... no parece demasiado fácil de entender, ¿no? Veamos un caso particular con las secuencias de números positivos $\{a,b,c\},\{p,q,r\},\{x,y,z\}$:

$$\begin{array}{lrcl} & (a+b+c)(p+q+r)(x+y+z) & \geq & (\sqrt[3]{apx}+\sqrt[3]{bqy}+\sqrt[3]{crz})^3 \\ \text{con otras variables:} & (a^3+b^3+c^3)(p^3+q^3+r^3)(x^3+y^3+z^3) & \geq & (apx+bqy+crz)^3 \end{array}$$

La forma típica de aplicar la desigualdad de Hölder es hacer aparecer en los numeradores una potencia exacta, multiplicando por factores convenientes. Por ejemplo, para demostrar la desigualdad $\boxed{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}$ (que tanto trabajo costó), simplemente expresamos $\frac{a^2}{b}\frac{a^2}{b}(a^2b^2)=(a^2)^3$, por lo tanto al hacer la suma cíclica y aplicar Hölder se tiene

$$(\sum\frac{a^2}{b})(\sum\frac{a^2}{b})(\sum a^2b^2)\geq\left(\sum\sqrt[3]{\frac{a^2a^2a^2b^2}{b\cdot b}}\right)^3=(\sum a^2)^3,$$

con lo cual hemos probado que $(\sum\frac{a^2}{b})^2\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{\sum a^2b^2}$, es decir $(\sum\frac{a^2}{b})^2\geq\frac{(a+b+c)^3}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$, que es $\geq 3(a^2+b^2+c^2)$ porque porque $(a^2+b^2+c^2)^2\geq 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$.

El truco de repetir la expresión que queremos acotar puede ser útil para cancelar raíces, como en el siguiente ejemplo.

Problema 2.11 *Sea* $f=\frac{a}{\sqrt{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt{c+2a}}$, *donde* $a,b,c>0$. *Probar que* $f\geq\sqrt{a+b+c}$.

Solución. $\underbrace{(\sum\frac{a}{\sqrt{a+2b}})}_{f}\cdot\underbrace{(\frac{a}{\sqrt{a+2b}})}_{f}\cdot(\sum a(a+2b))\geq(\sum a)^3$, entonces f^2 es mayor o igual que $\frac{(a+b+c)^3}{a(a+2b)+b(b+2c)+c(c+2a)}=\frac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)^2}=a+b+c$, lo que queríamos demostrar.

Teorema 2.12 (Desigualdad de Hölder: otra formulación) *Si* $a_1,\ldots,a_n,b_1\ldots b_n$ *y* p,q *son positivos y* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *entonces*

$$a_1b_1+\cdots+a_nb_n\leq(a_1^p+\cdots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}\cdot(b_1^q+\cdots+b_n^q)^{\frac{1}{q}}$$

Cuando $p=q=2$, *se tiene Cauchy-Schwarz.*

Veamos cómo demostrar esta nueva formulación de Hölder a partir de la desigualdad inicial, suponiendo por ejemplo $p=\frac{5}{3},q=\frac{5}{2}$, con $1/p+1/q=1$.

$$\begin{array}{lrcl} & (a^5+b^5)^3(x^5+y^5)^2 & = & (a^5+b^5)(a^5+b^5)(a^5+b^5)(x^5+y^5)(x^5+y^5) \\ & & \geq & (a^3x^2+b^3y^2)^5 \qquad \text{(por Hölder)} \\ \text{elevando a } 1/5: & (a^5+b^5)^{\frac{3}{5}}(x^5+y^5)^{\frac{2}{5}} & \geq & a^3x^2+b^3y^2 \\ \text{luego} & (a^{5/3}+b^{5/3})^{\frac{3}{5}}(x^{5/2}+y^{5/2})^{\frac{2}{5}} & \geq & ax+by, \end{array}$$

tras reemplazar en el último paso las variables $\{a,b,x,y\}$ por $\{a^{\frac{1}{3}},b^{\frac{1}{3}},x^{\frac{1}{2}},y^{\frac{1}{2}}\}$. En particular, para cualesquiera a,b,x,y,m,n positivos se tiene

$$(a^{m+n}+b^{m+n})^m(x^{m+n}+y^{m+n})^n\geq(a^mx^n+b^my^n)^{m+n}$$

2.3. Ejercicios

En los primeros ejercicios intentar Cauchy-Schwarz y en los últimos Hölder, aunque algunos pueden requerir la aplicación de las dos desigualdades y/o la realización de varias etapas. Y por supuesto, la desigualdad de las medias siempre ayuda.

Problema 2.13 *Redemostrar algunos de los ejercicios ya resueltos en la sección anterior.*

Problema 2.14 *Si* $a, b, c \geq 0$, *probar que* $\boxed{a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq \sqrt{a+b+c}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Problema 2.15 *Sean* a, b, c, d *números reales positivos. Probar que*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2$$

Problema 2.16 *Si* $a, b, c > 0$, *probar que* $\boxed{\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+2c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+2a}\right)^2 \geq \frac{1}{3}}$

Problema 2.17 *Si* $a, b, c > 0$, *demostrar las desigualdades*

$$2 \leq \frac{a+b}{2a+b} + \frac{b+c}{2b+c} + \frac{c+a}{2c+a} < \frac{5}{2}$$

Problema 2.18 (OME 2008) *Demostrar que para cualesquiera números reales* a, b *tales que* $0 < a, b < 1$, *se cumple la desigualdad siguiente:*

$$\sqrt{ab^2 + a^2b} + \sqrt{(1-a)(1-b)^2 + (1-a)^2(1-b)} < \sqrt{2}$$

Problema 2.19 *Si* $a, b, c, m, n > 0$, *demostrar la desigualdad*

$$\frac{a}{mb+nc} + \frac{b}{mc+na} + \frac{c}{ma+nb} \geq \frac{3}{m+n}$$

Problema 2.20 *Si* a, b, c, x, y, z *son positivos, demostrar que se cumple la desigualdad:*

$$(a^4x^3 + b^4y^3 + c^4z^3)^7 \leq (a^7 + b^7 + c^7)^4(x^7 + y^7 + z^7)^3$$

Problema 2.21 *Para* a, b, c, x, y, z *positivos, se verifica* $\boxed{\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}}$

Problema 2.22 *Si* $a, b, c > 0$ *probar que* $\boxed{\frac{a^6}{b^2+c^2} + \frac{b^6}{c^2+a^2} + \frac{c^6}{a^2+b^2} \geq \frac{abc(a+b+c)}{2}}$

Problema 2.23 *Si* $a, b, c > 0$ *probar que* $\boxed{\frac{ab}{\sqrt{ab+2c^2}} + \frac{bc}{\sqrt{bc+2a^2}} + \frac{ca}{\sqrt{ca+2b^2}} \geq \sqrt{ab+bc+ca}}$

3. Desigualdades de reordenación y de Chebyshev

3.1. Reordenación

La maravillosa desigualdad de reordenación se basa en el siguiente principio muy simple:

$$\text{Si } a \geq b \geq 0 \text{ y } p \geq q \geq 0 \quad \Rightarrow \quad ap + bq \geq aq + bp.$$

Demostración: $(ap + bq) - (aq + bp) = (a - b)(p - q) \geq 0$.
La generalización a secuencias de mayor tamaño es inmediata.

Teorema 3.1 (Desigualdad de reordenación) -
Sean $\{a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0\}$ y $\{b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0\}$. Entonces, de todas las posibles sumas $a_1(*) + \cdots + a_n(*)$, donde los asteriscos $(*)$ se rellenan con una permutación de los elementos $b_1, \ldots, b_n$, la suma mayor se alcanza cuando se colocan los $\{b_i\}$ en el mismo orden que los $\{a_i\}$, y la suma menor cuando se colocan exactamente en orden inverso, es decir

$$\boxed{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 \leq a_1(*) + a_2(*) + \cdots + a_n(*) \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}$$

"Se gana más vendiendo mucho de lo caro y poco de lo barato."
"Se gasta menos comprando mucho de lo barato y poco de lo caro."

Dem. Siempre que existan índices (i, j) tales que (b_i, b_j) estén desordenados respecto a (a_i, a_j), al reordenarlos la suma $a_i b_i + a_j b_j$ aumenta. El proceso termina con una suma máxima cuando las sucesiones están igualmente ordenadas. De forma análoga se resuelve la cuestión de la suma mínima.

Problema 3.2 *Demostrar las siguientes desigualdades para $a, b, c \geq 0$:*

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a, \qquad a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2 bc + b^2 ca + c^2 ab$$

Solución. En la primera desigualdad tenemos que que los números $\{a^2, b^2, c^2\}$ se cruzan con una permutación de los números $\{a, b, c\}$. Si el orden de las variables fuera por ejemplo $a \leq b \leq c$, tendríamos $a^2 \leq b^2 \leq c^2$, por lo tanto el máximo valor que puede alcanzar una suma $a^2(*) + b^2(*) + c^2(*)$ es cuando se rellenan los asteriscos en el orden a, b, c. La demostración para cualquier otra ordenación de a, b, c es totalmente análoga.

La segunda desigualdad es simétrica, luego podemos suponer sin pérdida de generalidad $a \leq b \leq c$. Dado que estamos cruzando los números $ab \leq ac \leq bc$ con una permutación de ellos mismos, tenemos que

$$(ab)(ac) + (bc)(ba) + (ca)(cb) \leq a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 \leq a^4 + b^4 + c^4,$$

aplicando en el último paso otra vez la desigualdad de reordenación (o la de Cauchy-Schwarz).

Si $a \leq b \leq c$, se tienen las siguientes sucesiones ordenadas (entre otras):

$$\begin{array}{cc}
a^2 \leq b^2 \leq c^2 & 1/c \leq 1/b \leq 1/a \\
ab \leq ac \leq bc & a + b \leq a + c \leq b + c \\
\frac{1}{bc} \leq \frac{1}{ca} \leq \frac{1}{ab} & a(b + c) \leq b(a + c) \leq c(a + b)
\end{array}$$

La desigualdad de reordenación también vale para más de dos secuencias. Por ejemplo, si la aplicamos a las sucesiones $(a, b, c), (b, c, a), (c, a, b)$ se obtiene que $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$. De forma análoga se demuestra el caso general de la desigualdad de las medias (para $n > 2$).

3.2. (Menos urgente) Chebyshev

La desigualdad de Chebyshev es una consecuencia inmediata de la de reordenación. Omitir si se disponde de poco tiempo.

Teorema 3.3 (Desigualdad de Chebyshev) *Sean $\{a_i\}_{i=1}^n$ y $\{b_i\}_{i=1}^n$ dos sucesiones de números positivos. Entonces se tiene:*

- *Si las sucesiones están ordenadas de la misma manera,*

$$\boxed{\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n} \geq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \cdot \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}}$$

- *Si las sucesiones están en orden inverso,*

$$\boxed{\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \cdot \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}}$$

Por ejemplo, si $\{a \leq b \leq c\}$ y $\{p \leq q \leq r\}$, entonces por la desigualdad de reordenación

$$\begin{aligned} ap+bq+cr &= ap+bq+cr \\ ap+bq+cr &\geq aq+br+cp \\ ap+bq+cr &\geq ar+bp+cq \end{aligned}$$

Sumando todas las desigualdades se obtiene $3(ap+bq+cr) \geq (a+b+c)(p+q+r)$. Y de forma análoga se demuestra que $3(ar+bq+cp) \leq (a+b+c)(p+q+r)$.

El poder principal de la desigualdad de Chebyshev radica en su habilidad para separar una suma de términos complicados en un producto de dos sumas más sencillas, como se verá a continuación.

Problema 3.4 *Si $x, y, z > 0$, demostrar que* $\boxed{\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}}$.

Solución. Podemos suponer sin pérdida de gerenalidad la ordenación $x \leq y \leq z$, en cuyo caso $\frac{1}{y+z} \leq \frac{1}{z+x} \leq \frac{1}{x+y}$, y también $\frac{x}{y+z} \leq \frac{y}{z+x} \leq \frac{z}{x+y}$. Se puede aplicar Chebyshev (y luego Nesbitt):

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{(x+y+z)}{3} \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}\right)}_{\geq \frac{3}{2}} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

Problema 3.5 *Si $a, b, c \geq 0$, probar que* $\boxed{3(a^3+b^3+c^3) \geq (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}$.

Solución. Aplicar Chebyshev a las sucesiones (a, b, c) y (a^2, b^2, c^2) que tienen el mismo orden.

Problema 3.6 *Si $(a \geq b \geq c > 0)$, $(0 < x \leq y \leq z)$, probar que* $\boxed{\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \geq 3\left(\frac{a+b+c}{x+y+z}\right)}$

Solución. Aplicar Chebyshev a las sucesiones $(a, b, c), (\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z})$ y luego dos veces las medias.

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \geq \frac{a+b+c}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq (a+b+c)\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} \geq \frac{3(a+b+c)}{x+y+z}$$

3.3. Ejercicios

Problema 3.7 *Para* $a, b, c > 0$*, demostrar que* $\boxed{\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c}$

Problema 3.8 *Para* $a, b, c > 0$*, demostrar que* $\boxed{\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$

Problema 3.9 *Si* $a, b, c > 0$*, probar que* $\boxed{\frac{a}{b(b+c)} + \frac{b}{c(c+a)} + \frac{c}{a(a+b)} \geq \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}}$

Problema 3.10 *Sean* $a_1, \dots, a_n > 0$ *y* $k \geq 1$*. Probar que* $\boxed{\sqrt[k]{\frac{a_1^k+\cdots+a_n^k}{n}} \geq \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}}$

Problema 3.11 *Si* $a \geq b \geq c \geq d$*,* $x \leq y \leq z \leq w$*, demostrar que*

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} + \frac{d}{w} \geq \frac{a+b+c+d}{\sqrt[4]{xyzw}}$$

Problema 3.12 *Si* $a, b, c > 0$*, probar que* $\boxed{\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2}}$

4. Técnicas, estrategias, cambios de variable...

4.1. Algunos cambios de variable

Problema 4.1 (renombrar denominadores) *Para a, b, c positivos, demostrar que*

$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq\frac{9}{2}$$

Solución. Introducimos las nuevas variables ($x = b + c, y = c + a, z = a + b$). Observando que $x + y + z = 2a + 2b + 2c$, la desigualdad en las nuevas variables queda expresada como $(x+y+z)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$, y se resuelve de forma sencilla aplicando dos veces la desigualdad de las medias.

Problema 4.2 (Renombrar denominadores + resolver sistema)

Redemostrar la desigualdad de Nesbitt: $$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

Solución. Como antes, introducimos $\{x = b+c, y = c+a, z = a+b\}$, pero ahora necesitamos resolver un sistema de ecuaciones para expresar a, b, c en función de x, y, z. La solución es $\{a = \frac{y+z-x}{2}, b = \frac{x+z-y}{2}, c = \frac{x+y-z}{2}\}$ Sustituyendo en el enunciado:

$$\frac{y+z-x}{2x}+\frac{x+z-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}\geq\frac{3}{2}$$

Esto se cumple siempre, ya que por la desigualdad de las medias $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2, \ldots$

Una advertencia: al hacer el cambio de variable anterior, la nueva desigualdad en x, y, z no tiene por qué cumplirse para cualesquiera x, y, z positivos, ya que el enunciado sólo lo exige para $a, b, c > 0$, que corresponde a x, y, z verificando las desigualdades triangulares $x + y - z > 0, x + z - y > 0, y + z - x > 0$. En este caso resultó que la nueva desigualdad sí se cumple para $x, y, z > 0$ arbitrarios.

Problema 4.3 (Sumar términos para factorizar) Si en la desigualdad de Nesbitt sumamos 1 a cada uno de los tres sumandos, tenemos

$$\begin{array}{rc} & \frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}+1\geq\frac{3}{2}+3 \\ \Leftrightarrow & (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq\frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{(x+y+z)}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq\frac{9}{2}, \end{array}$$

donde hemos realizado el cambio de variable anterior, ahora con la ventaja de que no fue necesario resolver un sistema de ecuaciones, simplemente observamos que $x+y+z = 2(a+b+c)$. Esta nueva desigualdad se demuestra de forma sencilla.

Problema 4.4 (Otro de sumar o restar términos) *Si $a, b, c > 0$, probar que*

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}.$$

Solución. Si se suma b al primer término, c al segundo y a al tercero, hay que probar 3 veces la desigualdad $\frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{a^2+ab+b^2}\geq\frac{2(a+b)}{3}$. Si se resta a al primer término, b al segundo y c al tercero, hay que probar 3 veces la desigualdad $-\frac{a2b+ab^2}{a^2+ab+b^2}\geq-\frac{a+b}{3}$.

Problema 4.5 (Lados de un triángulo) *Sean a, b, c las longitudes de un triángulo. Demostrar que:*

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

El primer signo $\leq$ corresponde a la desigualdad de Nesbitt, válida para $a, b, c > 0$ arbitrarios. Para la segunda desigualdad, realizamos el cambio de variable estándar para trabajar con los lados de un triángulo:

$$\{a = y + z, b = x + z, c = x + y\}$$

Las cantidades positivas $\{x = \frac{b+c-a}{2}, x = \frac{c+a-b}{2}, x = \frac{a+b-c}{2}\}$ se interpretan geométricamente como las distancias entre los vértices y los puntos de contacto con la circunferencia inscrita. Resolvemos por fuerza bruta.

$$\begin{aligned} 2 - \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) &= 2 - \frac{y+z}{2x+y+z} + \frac{z+x}{2y+z+x} + \frac{x+y}{2z+x+y} \\ &= \frac{3(x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y + 14xyz)}{(2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y)} > 0 \end{aligned}$$

A pesar de que la segunda desigualdad es estricta, la cota 2 no se puede mejorar. En efecto, si $b = c$ son iguales y mucho mayores que a (se forma un triángulo isósceles de base cada vez menor), entonces la expresión estudiada se acerca a 2 tanto como se quiera.

Problema 4.6 (Eliminar raíces) *Si $a, b, c > 0$, demostrar que* $\boxed{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}}$

Solución.

$$\begin{aligned} \text{Reemplazando } (a,b,c) \text{ por } (a^3,b^3,c^3): &\quad \frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3} \geq \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \\ \text{eliminando denominadores:} &\quad a^6c^3 + b^6a^3 + c^6b^3 \geq a^5b^2c^2 + b^5c^2a^2 + c^5a^2b^2 \\ \text{acotamos por las medias:} &\quad \tfrac{a^6c^3+a^6c^3+b^6a^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^{15}b^6c^6} = a^5b^2c^2 \\ &\quad \tfrac{b^6a^3+b^6a^3+c^6b^3}{3} \geq \sqrt[3]{b^{15}c^6a^6} = b^5c^2a^2 \\ &\quad \tfrac{c^6b^3+c^6b^3+a^6c^3}{3} \geq \sqrt[3]{c^{15}a^6b^6} = c^5a^2b^2 \end{aligned}$$

Problema 4.7 (Eliminar raíces II: normalizar) *Normalizar la desigualdad anterior.*

Solución. Observar que la desigualdad anterior es homogénea en a, b, c, quiere decir que si se reescalan las variables multiplicándolas por una constante (reemplazar (a, b, c) por (ta, tb, tc)) se obtiene otra vez la misma desigualdad. Por lo tanto, podemos reescalar como mejor nos convenga, suponer $a+b+c = \textit{constante}$, o $abc = \textit{constante}$. En este caso, lo mejor es suponer $abc = 1$ para eliminar la raíz cúbica. Ver la solución en el apartado Desigualdades con restricciones.

Problema 4.8 (Homogeneizar) *Si a, b, c son números no negativos con $a+b+c = 3$, probar que* $\boxed{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geq 6}$.

Ante una desigualdad con una restricción como en este caso, puede ser interesante homogeneizar la desigualdad, introduciendo un término de grado adecuado que valga 1 de acuerdo a la restricción. En este caso, necesitamos colocar a la derecha un término de grado 2 que valga 1. Dado que $a + b + c = 3$, el término buscado es $\frac{(a+b+c)^2}{9}$, y la desigualdad homogeneizada es

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geq 6 \cdot \frac{(a+b+c)^2}{9},$$

que se resuelve de forma sencilla con Cauchy-Schwarz o las medias. Se pueden combinar las técnicas de normalizar y homogeneizar: primero normalizar un término "feo", y después homogeneizar de otra manera. En el apartado siguiente se verá cómo trabajar con restricciones.

4.2. Desigualdades con restricciones

Problema 4.9 (Producto constante) *Si* $abc = 1$*, probar que* $\boxed{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c}$

Solución. El cambio de variable ($a = x/y, b = y/z, c = z/x$) es muy útil para restricciones del tipo $abc = 1$. El resultado es una nueva desigualdad homogénea (todos los términos de grado constante):

$$\frac{y\,z}{x^2} + \frac{x\,z}{y^2} - \frac{z}{x} - \frac{y}{z} + \frac{x\,y}{z^2} - \frac{x}{y} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^3\,z^3 - x\,y^2\,z^3 + x^3\,z^3 - x^3\,y\,z^2 - x^2\,y^3\,z + x^3\,y^3}{x^2\,y^2\,z^2} \geq 0,$$

que se resuelve por la desigualdad de las medias (ya que $(3, 3, 0)$ mayora a $(3, 2, 1)$).

Problema 4.10 (Producto constante II) *Si* $abc = 1$*, probar que* $\boxed{a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c}$

Solución. Otra vez hacemos el cambio ($a = x/y, b = y/z, c = z/x$), resultando la desigualdad equivalente

$$\frac{y^2\,z^4 + x^4\,z^2 + x^2\,y^4}{x^2\,y^2\,z^2} \geq \frac{y\,z^2 + x^2\,z + x\,y^2}{x\,y\,z}$$

Eliminando denominadores, debemos probar que $x^2y^4 + y^2z^4 + z^2x^4 \geq x^3yz^2 + y^3zx^2 + z^3xy^2$. Intentamos expresar $xy^2z^3 = (x^2y^4)^k(y^2z^4)^l(z^2x^4)^m$, para lo cual debemos igualar los pesos de x, y, z en dicha expresión y resolver un sistema $\{2k + 4m = 1, 4k + 2l = 2, 4l + 2m = 3\}$. La solución es $k = 1/6, l = 2/3, m = 1/6$, lo cual permite acotar $xy^2z^3 \leq \frac{1}{6}x^2y^4 + \frac{2}{3}y^2z^4 + \frac{1}{6}z^2x^4$, $yz^2x^3 \leq \frac{1}{6}x^2z^4 + \frac{2}{3}z^2x^4 + \frac{1}{6}x^2y^4$, $zx^2y^3 \leq \frac{1}{6}x^2x^4 + \frac{2}{3}x^2y^4 + \frac{1}{6}y^2z^4$, concluyendo la solución.

En este caso el cambio estándar destruyó la simetría en a, b, c y transformó la desigualdad en una desigualdad cíclica, más difícil de probar utilizando las medias. Veremos otro procedimiento alternativo que preserva la simetría, a costa de trabajar con grados más elevados.

Primero se homogeneiza la desigualdad introduciendo en el lado derecho un término de grado 1 y con valor 1, es decir $\sqrt[3]{abc} = 1$:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq (a + b + c)\sqrt[3]{abc}$$

Reemplazando (a, b, c) por (a^3, b^3, c^3) : $\quad a^6 + b^6 + c^6 \geq (a^3 + b^3 + c^3)abc$

Esta desigualdad es inmediata porque la sucesión $(6, 0, 0)$ mayora a $(4, 1, 1)$.

Tercera solución: sumar 3 veces 1 y demostrar que $a^2 + 1 + b^2 + 1 + c^2 + 1 \geq a + b + c + 3$. Usar las medias $a^2 + 1 \geq 2a \ldots$, y otra vez las medias $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$, sustituyendo en el lugar adecuado $a + b + c = 3$.

Problema 4.11 (Producto constante III) *Si* $abc = 1$*, probar que*

$$\boxed{\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}}.$$

Solución. Los denominadores son feos, tienen grado alto. Si primero reemplazamos las variables a, b, c por $p = 1/a, q = 1/b, r = 1/c$, las nuevas variables p, q, r cumplen la restricción $pqr = 1$ y la desigualdad es más sencilla de resolver (queda como ejercicio).

Problema 4.12 (Suma constante) *Sean $a, b, c \geq 0$ tales que $a + b + c = 3$. Demostrar que*

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geq 6$$

Solución. Haremos el cambio de variable estándar para homogeneizar una desigualdad con restricción de suma k constante ($k = 3$): $\left\{a = \frac{3x}{x+y+z}, b = \frac{3y}{x+y+z}, c = \frac{3z}{x+y+z}\right\}$, Por lo tanto tenemos

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca - 6 = \frac{3\left(z^2 - y\,z - x\,z + y^2 - x\,y + x^2\right)}{\left(z + y + x\right)^2} \geq 0$$

Otra solución (arte y suerte más que técnica). Darse cuenta de que el término de la izquierda es $(a + b + c)^2 - (ab + bc + ca)$, y que $ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$.

Problema 4.13 (Suma de cuadrados constante) *Sean $a, b, c, d > 0$ y $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Probar que* $\boxed{\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geq 4}$.

Solución. Homogeneizamos multiplicando a la derecha por un término de grado 1 que valga 1, es decir $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}$. Probaremos que $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geq 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{a^2 \cdot a^2}{b \cdot a^2} + \frac{b^2 \cdot b^2}{c \cdot b^2} + \frac{c^2 \cdot c^2}{d \cdot c^2} + \frac{d^2 \cdot d^2}{a \cdot d^2} &\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2}{a^2b + b^2c + c^2d + d^2a} \\
a(ab) + b(bc) + c(cd) + d(da) &\leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2} \\
\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2} = \sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)} &\leq \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}{2}
\end{aligned}$$

Las dos primeras desigualdades son Cauchy-Schwarz, la tercera es la de las medias. Combinando las tres se tiene el resultado deseado.

Problema 4.14 (Restricción de desigualdad) *Si $a, b, x, y > 0$, $1 \geq a^{11} + b^{11}$, $1 \geq x^{11} + y^{11}$, probar que* $\boxed{1 \geq a^5x^6 + b^5y^6}$.

Solución. No existe una técnica específica para tratar con desigualdades $a^n + b^n \leq constante$. Simplemente no hay que tenerle miedo al problema y aplicar alegremente la desigualdad de las medias, sumar todo y listo.

$$\begin{aligned}
a^5x^6 = (a^{11})^{\frac{5}{11}}(x^{11})^{\frac{6}{11}} &\leq \frac{5}{11}a^{11} + \frac{6}{11}x^{11}, \\
b^5y^6 &\leq \frac{5}{11}b^{11} + \frac{6}{11}y^{11}, \\
\Rightarrow (a^5x^6 + b^5y^6) &\leq \frac{5}{11}(a^{11} + b^{11}) + \frac{6}{11}(x^{11} + y^{11}) \\
&\leq \frac{5}{11} \cdot 1 + \frac{6}{11} \cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

Problema 4.15 (Combinación de técnicas) *Si $x, y, z > 0$, probar que*

$$\frac{x}{\sqrt{y+z}} + \frac{y}{\sqrt{z+x}} + \frac{z}{\sqrt{x+y}} \geq \sqrt{\frac{3(x+y+z)}{2}}$$

Solución. Primer intento: eliminar raíces con el cambio ($a^2 = y+z, b^2 = z+x, c^2 = x+y$), con cambio inverso ($x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2a}, y = \frac{c^2+a^2-b^2}{2b}, z = \frac{a^2+b^2-c^2}{2c}$). Dado que $a^2+b^2+c^2 = 2(x+y+z)$, debemos probar que:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2a} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2b} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2c} \geq \frac{1}{2}\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

multiplicando por 2:
$$\frac{b^2+c^2-a^2}{a} + \frac{c^2+a^2-b^2}{b} + \frac{a^2+b^2-c^2}{c} \geq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Sumamos $2(a+b+c)$ para sacar factor común $a^2+b^2+c^2$ (un viejo truco):

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 2(a+b+c) + \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Sabemos que $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3} \Rightarrow 2\sqrt{3(a^2+b^2+b^2)} \geq 2(a+b+c)$. Demostraremos una desigualdad más fuerte que la deseada:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) &\geq 3\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}\\ \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) &\geq 3\sqrt{3},\end{aligned}$$

que es consecuencia inmediata de la desigualdad de las medias (comprobarlo).

Segunda solución: aplicar Hölder para eliminar las raíces del denominador, reptiendo dos veces la expresión $f = \sum \frac{x}{\sqrt{y+z}}$ y multiplicando por el factor $\sum x(y+z)$ para completar cubos en el numerador:

$$\underbrace{\sum \frac{x}{\sqrt{y+z}}}_{f} \cdot \underbrace{\sum \frac{x}{\sqrt{y+z}}}_{f} \cdot \sum x(y+z) \geq (x+y+z)^3 \Rightarrow f^2 \geq \frac{(x+y+z)^3}{2(xy+xz+yz)} \geq \frac{3(x+y+z)}{2}$$

porque $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+xz+yz)$.

Tercera solución: aplicar Jensen a la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, que es decreciente y $f''(x) > 0$ (ver la siguiente sección).

La siguiente desigualdad fue propuesta recientemente en una fase nacional. Proponemos varias posibles soluciones, ninguna es fácil!

Problema 4.16 (OME 2011) *Si $a, b, c > 0$, demostrar que*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{5}{2}$$

Solución. La principal dificultad de este problema es que la expresión $N = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ es $\geq \frac{3}{2}$, mientras que $L = \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$ es ≤ 1. Si nos alejamos del punto de equilibrio $a = b = c$, N crece pero L decrece, y debemos demostrar que $N + \sqrt{L} \geq \frac{5}{2}$, lo cual no es nada sencillo. Debemos encontrar expresiones $\sqrt{L} \geq algo$, algo que no tenga radicales.

a) Para aplicar la desigualdad de las medias debemos comparar dos cantidades que sean iguales en el caso de igualdad $a = b = c$, para lo cual restamos $\frac{1}{2}$ y queda la desigualdad equivalente $N - \frac{1}{2} + \sqrt{L} \geq 2$. Si ahora aplicamos la desigualdad de las medias tenemos

$$N - \frac{1}{2} + \sqrt{L} \geq 2\sqrt{(N - \frac{1}{2})\sqrt{L}},$$

y el problema estará resuelto si se prueba que $(N-\frac{1}{2})\sqrt{L} \geq 1$, es decir, $(N-\frac{1}{2})^2 \geq \frac{1}{L}$. Esta nueva desigualdad no tiene radicales, pero al sustituir a, b, c y eliminar denominadores queda algo espantoso, demencial. Indicamos las sucesiones de exponentes y cuántos términos hay de cada tipo.

$$\begin{array}{ccccccccc} 4\sum\limits_{sim} a^7b & +4\sum a^6bc & +3\sum\limits_{sim} a^5b^2c & +2\sum\limits_{sim} a^4b^4 & \geq & 3\sum\limits_{sim} a^5b^3 & +3\sum\limits_{sim} a^4b^3c & +2\sum a^4b^2c^2 & +6\sum a^3b^3c^2 \\ 24 & 12 & 18 & 6 & & 18 & 18 & 6 & 18 \\ (7,1,0) & (6,1,1) & (5,2,1) & (4,4,0) & & (5,3,0) & (4,3,1) & (4,2,2) & (3,3,2). \end{array}$$

Se resuelve así: gastamos 18 términos de tipo $(7,1,0)$ para mayorar a los 18 términos de tipo $(5,3,0)$, los 6 restantes $(7,1,0)$ junto con 12 de tipo $(6,1,1)$ los empleamos contra los 18 de tipo $(4,3,1)$, y nos quedan 18 términos contra 18 de tipo $(5,2,1) > (3,3,2)$ y 6 contra 6 de tipo $(4,4,0) > (4,2,2)$.

b) Otra posible aplicación de la desigualdad de las medias es la siguiente:

$$\frac{\sqrt{L}}{2} + \frac{\sqrt{L}}{2} + \frac{1}{2L} \geq 3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{L}}{2}\frac{\sqrt{L}}{2}\frac{1}{2L}} = \frac{3}{2},$$

es decir, $\sqrt{L} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{2L}$, y para rematar el problema debemos probar que $N \geq 1 + \frac{1}{2L}$. No es tan horrible, se reduce a probar que $\sum_{sim} a^4b \geq \sum_{sim} a^3b^2$.

c) Otra forma de desembarazarse de la raíz $\sqrt{L}$ utilizando la desigualdad de las medias. Si introducimos la notación $P = a^2+b^2+c^2, Q = ab+bc+ca$, podemos escribir

$$\sqrt{L} = \sqrt{\frac{Q}{P}} = \sqrt{\frac{QQ}{PQ}} = \frac{Q}{\sqrt{PQ}} \underbrace{\geq}_{medias} \frac{2Q}{P+Q}$$

Para rematar el problema habría que probar que $N + \frac{2Q}{P+Q} \geq \frac{5}{2}$. Es brutalizable, al eliminar denominadores resulta la desigualdad

$$2(a^5+b^5+c^5) \geq a^4b + a^4c + b^4a + b^4c + c^4a + c^4b,$$

que se cumple porque $(5,0,0)$ mayora a $(4,1,0)$.

d) Finalmente, cualquiera de los procedimientos a,b,c anteriores se ve notablemente simplificado si además acotamos $N \geq algo$. Esto se obtiene preparando la expresión N para que aparezcan cuadrados en el numerador, y poder aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz en forma de Engel y sumar los denominadores. Escribimos $\frac{a}{b+c} = \frac{a^2}{ab+ac}, \ldots$

$$N = \frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{ba+bc} + \frac{c^2}{ca+cb} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} = \underbrace{\frac{P+2Q}{2Q}}_{\text{llamamos } C \text{ a esto}}$$

Dado que $N \geq C$, en el caso a) será suficiente probar que $(C-\frac{1}{2})^2 \geq \frac{1}{L}$, en el caso b) $C \geq 1 + \frac{1}{2L}$ y en el caso c) $C + \frac{2Q}{P+Q} \geq \frac{5}{2}$.

$$\begin{array}{ll} a) & (C-\frac{1}{2})^2 \geq \frac{1}{L} \Leftrightarrow \left(\frac{P+2Q}{2Q} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{P}{Q} \geq 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \frac{(P-Q)^2}{4Q^2} \geq 0 \\ b) & C \geq 1 + \frac{1}{2L} \Leftrightarrow \frac{P+2Q}{2Q} - 1 - \frac{P}{2Q} - \geq 0 \Leftrightarrow 0 \geq 0 \\ c) & C + \frac{2Q}{P+Q}) \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{P+2Q}{2Q} + \frac{2Q}{P+Q} - \frac{5}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \frac{(P-Q)^2}{2Q(P+Q)} \geq 0 \end{array}$$

5. (Opcional) Desigualdades de Schur y Jensen

Aunque se puede sobrevivir en una olimpíada nacional sin saber estas desigualdades, pueden ser de gran utilidad para resolver un problema difícil (3 o 6) o para la Olimpíada Iberoamericana o la Internacional.

5.1. Schur

Teorema 5.1 (Desigualdad de Schur) *Sean a, b, c, r positivos. Entonces*

$$\boxed{a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-c)(b-a) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0,}$$

y la igualdad ocurre si $a = b = c$ o si dos variables son iguales y la otra 0.

Dem. Dado que la desigualdad es simétrica en a, b, c, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a \geq b \geq c$. Agrupando términos la desigualdad es equivalente a

$$(a-b)\left(a^r(a-c) - b^r(b-c)\right) + c^r(a-c)(b-c) \geq 0, \qquad \text{(inmediato)}.$$

La forma expandida (desarrollando todos los productos) para $r = 1$ es

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b$$

En notación abreviada: $\sum a^3 + 3abc \geq \sum_{sim} a^2b$. Observar que las secuencias de exponentes son $(3, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ y $(2, 1, 0)$. El término "débil" $3abc$ no mayora a ningún otro, pero incluido dentro del bloque de Schur ayuda a mayorar a términos mayores que él. Es por eso que la desigualdad de Schur es extremadamente útil como un complemento al uso de la fuerza bruta.

Dado que es muy difícil encontrar un ejercicio preparado para utilizar la desigualdad de Schur en su expresión original, debemos aprender a reconocer cómo se esconde Schur en su forma expandida para distintos valores r. Hay que reconocer cuándo algo "huele a Schur".

$$\text{Para } r = 2: \qquad \sum a^4 + \sum a^2bc \;\geq\; \sum_{sim} a^3b$$

$$\text{Para } r \text{ entero:} \qquad \sum a^{r+2} + \sum a^r bc \;\geq\; \sum_{sim} a^{r+1}b$$

Para valores racionales $r = \frac{k}{n}$, si se reemplazan (a, b, c) por (a^n, b^n, c^n), obtenemos una expresión con exponentes enteros:

$$a^k(a^n - b^n)(a^n - c^n) + b^k(b^n - c^n)(b^n - a^n) + c^k(c^n - a^n)(c^n - b^n) \geq 0,$$

$$\text{en forma expandida:} \qquad \sum a^{2n+k} + \sum a^n b^n c^k \;\geq\; \sum a^{n+k}b^n$$

Las formas de camuflarse que tiene el Sr. Schur son casi ilimitadas:

$$r = 1 \text{ con variables } (a^n, b^n, c^n): \qquad \sum a^{3n} + 3a^n b^n c^n \;\geq\; \sum_{sim} a^{2n}b^n$$

$$r \text{ entero multiplicado por } abc: \qquad \sum a^{r+3}bc + \sum a^{r+1}b^2c^2 \;\geq\; \sum_{sim} a^{r+2}b^2c$$

$$r \text{ entero multiplicado por } (a+b+c): \qquad \sum a^{r+3} + \sum_{sim} a^r b^2 c \;\geq\; \sum_{sim} a^{r+1}b^2 + \sum a^{r+1}bc$$

Otros “disfraces” de la desigualdad de Schur:

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3+3xyz &\geq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x) \\ xyz &\geq (x+y-z)(y+z-x)(x+z-y) \\ 4(x+y+z)(xy+yz+zx) &\leq (x+y+z)^3+9xyz \end{aligned}$$

Y si a, b, c son los lados de un triángulo:

$$2(a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b) \geq a^3+b^3+c^3+9abc$$

Veamos cómo se aplica la desigualdad de Schur en un caso concreto.

Problema 5.2 *Sean a, b, c números reales positivos. Demostrar que*

$$\underbrace{(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)}_{f} \geq \frac{9}{4}$$

Solución. Fuerza bruta: eliminando denominadores en la expresión $f - \frac{9}{4}$ resulta la desigualdad equivalente:

$$4\sum_{sim} a^5b \quad +2\sum a^4bc \quad +6a^2b^2c^2 \quad \geq \quad \sum a^4b^2 \quad +6\sum a^3b^3 \quad +2\sum_{sim} a^3b^2c$$

nr. términos	24	6	6		6	18	12
exponentes	$(5,1,0)$	$(4,1,1)$	$(2,2,2)$		$(4,2,0)$	$(3,3,0)$	$(3,2,1)$

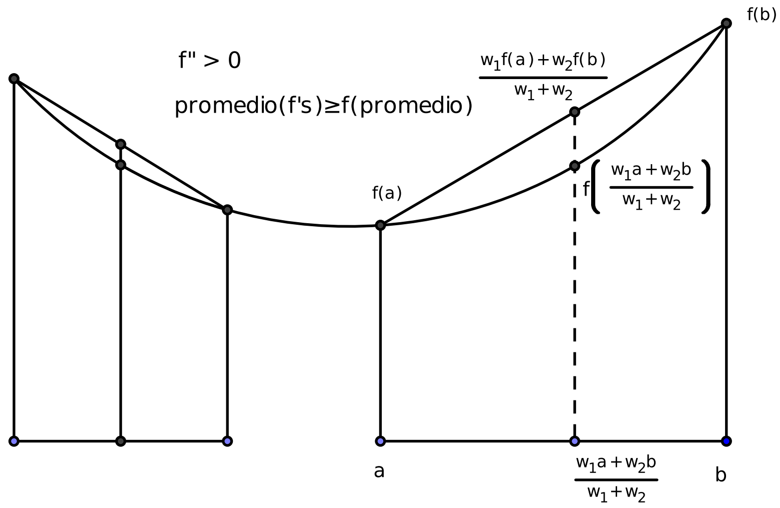
Ta difícil... los términos de la derecha parecen casi tan fuertes como los de la izquierda, y en la izquierda tenemos un débil $(2,2,2)$ que no mayora a ninguno de la derecha. Aquí acude Schur en nuestra ayuda, absorbiendo al débil en un equipo fuerte:

$$\begin{array}{rrcl} \text{Schur } r=1 \text{ multiplicado por } 2abc: & 2\sum a^4bc+6a^2b^2c^2 & \geq & 2\sum a^3b^2c \\ (5,1,0)>(4,2,0): & \sum a^5b & \geq & \sum a^4b^2 \\ (5,1,0)>(3,3,0): & 3\sum a^5b & \geq & 6\sum a^3b^3 \end{array}$$

Problema 5.3 *Si $x, y, z > 0$, $x+y+z=1$, demostrar que* $\boxed{0 \leq xy+yz+zx-2xyz \leq \frac{7}{27}}$

5.2. Jensen

Sea $[a, b]$ un intervalo de números reales, y sea f una función definida sobre $[a, b]$ tal que su derivada segunda f'' tiene signo constante en $[a, b]$. Usualmente f se denomina *convexa* si $f'' > 0$ y *cóncava* si $f'' < 0$. En caso de conflicto con la denominación, se piensa en una figura. Si $f'' > 0$, la cuerda está siempre por encima de la curva, y si $f'' < 0$, la cuerda está por debajo de la curva.



"El promedio de valores de f es $\geq$ la f en el punto promedio."

Cualquier punto x del intervalo $[a, b]$ se escribe como un promedio de a, b ponderado con pesos w_1, w_2, es decir $x = \frac{w_1 a + w_2 b}{w_1 + w_2}$. Por otra parte, el promedio de los valores $f(a), f(b)$ ponderado con los mismos pesos w_1, w_2, se encuentra situado en el segmento entre $f(a), f(b)$, en la vertical que pasa por $f(x)$. La generalización para un conjunto de muchos puntos es la siguiente desigualdad.

Teorema 5.4 (Desigualdad de Jensen) *Sea f una función definida sobre un intervalo que contiene a todos los números $a_1, \ldots, a_n$, y sean $w_1, \ldots, w_n > 0$. Entonces,*

$$\text{Si } f'' > 0, \qquad \frac{w_1 f(a_1) + \cdots + w_n f(a_n)}{w_1 + \cdots + w_n} \geq f\left(\frac{w_1 f a_1 + \cdots + w_n a_n}{w_1 + \cdots + w_n}\right)$$

$$\text{Si } f'' < 0, \qquad \frac{w_1 f(a_1) + \cdots + w_n f(a_n)}{w_1 + \cdots + w_n} \leq f\left(\frac{w_1 a_1 + \cdots + w_n a_n}{w_1 + \cdots + w_n}\right)$$

Ejemplo de funciones convexas ($f'' \geq 0$) en el intervalo $(0, \infty)$: x^r $(r \geq 1), 1/x^r$ $(r > 0), 1/\log(x)$, etc. Funciones cóncavas ($f'' \leq 0$): $\sqrt{x}$, cualquier x^r $(0 < r \leq 1), \log(x)$, etc.

Problema 5.5 (Ejemplo resuelto) *Si $x, y, z > 0$, probar que*

$$\frac{x}{\sqrt{y+z}} + \frac{y}{\sqrt{z+x}} + \frac{z}{\sqrt{x+y}} \geq \sqrt{\frac{3(x+y+z)}{2}}$$

Solución. Las tres raíces que aparecen en el denominador del término izquierdo están pidiendo a gritos definir la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ y estudiar su convexidad o concavidad. Resulta ser $f''(x) > 0$ para todo $x > 0$. En el término de la izquierda tenemos f actuando sobre los puntos $y + z, z + x, x + y$ con pesos x, y, z. Entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{xf(y+z) + yf(z+x) + zf(x+y)}{x+y+z} \quad &\geq \quad f\left(\frac{x(y+z) + y(z+x) + z(x+y)}{x+y+z}\right) \\
&= \quad f\left(\frac{2(xy+yz+zx)}{x+y+z}\right) \\
&\geq \quad f\left(\frac{2(x+y+z)}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{2(x+y+z)}},
\end{aligned}$$

donde la primera desigualdad es Jensen y la segunda se deriva del hecho de que f es decreciente y $xy + yz + zx \leq \frac{1}{3}(x+y+z)^2$. Multiplicando finalmente por $x + y + z$ se tiene lo deseado.

6. Problemas suplementarios

Problema 6.1 *Sean $a, b, c > 0$. Probar que*

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 3(a+b+c)$$

Problema 6.2 *Si $a, b, c > 0$, demostrar que*

$$\left(\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\right) \geq \frac{3}{a+b+c}$$

Problema 6.3 *Si a, b, c, d son números reales positivos, demostrar las desigualdades:*

$$\begin{aligned} \frac{(a+b+c+d)^3}{16abcd} &\geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \\ \sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}} &\leq \frac{a+b+c+d}{4} \end{aligned}$$

Problema 6.4 *Sean $a, b > 0$ tales que $ab = 1$. Probar que* $\dfrac{a}{a^2+3}+\dfrac{b}{b^2+3} \leq \dfrac{1}{2}$.

Problema 6.5 *Sean $a, b, c > 0$ números reales. Probar que*

$$\frac{a+2c}{a+2b}+\frac{b+2a}{b+2c}+\frac{c+2b}{c+2a} \geq 3$$

Problema 6.6 *Demostrar que para $a, b, c > 0$ se verifica*

$$\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{9} \leq \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} \leq \frac{a^3+b^3+c^3+abc}{4}$$

Problema 6.7 (OME 2010) *Para cualesquiera reales a, b, c positivos, demostrar que*

$$\frac{3a+b+c}{2a+3b+3b}+\frac{3b+c+a}{2b+3c+3a}+\frac{3c+a+b}{2c+3a+3b} \geq \frac{15}{8}$$

Problema 6.8 *Sean $a, b, x, y, z > 0$. Probar que* $\boxed{\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by} \geq \frac{3}{a+b}.}$

Problema 6.9 *Si $a, b, c > 0$, probar que se verifica*

$$\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c} \geq 2(a+b+c)$$

Problema 6.10 *Sean $a, b, c > 0, abc = 1$. Probar que* $\boxed{\frac{a}{b(a+b)}+\frac{b}{c(b+c)}+\frac{c}{a(c+a)} \geq \frac{3}{2}.}$

Problema 6.11 *Si $a, b, c > 0$, probar que se verifica*

$$6 \leq 4+2\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right) \leq \frac{4a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{4c}{a+b} \leq \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}$$

Problema 6.12 *Demostrar que si $a, b, c, d > 0, a+b+c+d = 1$, entonces se cumple que*

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3) \geq (a^2+b^2+c^2+d^2)+\frac{1}{8}$$

Problema 6.13 *Demostrar que si* $a, b, c, d > 0, abcd = 1$*, entonces se cumple que*

$$\frac{a}{b+c+d+1} + \frac{b}{c+d+a+1} + \frac{c}{d+a+b+1} + \frac{d}{a+b+c+1} \geq 1$$

Problema 6.14 *Sean* $x, y, z > 0$ *tales que* $xyz = 1$*. Probar las desigualdades*

$$\frac{1}{2} < \frac{x}{2x+1} + \frac{y}{2y+1} + \frac{z}{2z+1} \leq 1 \leq \frac{x}{x+2} + \frac{y}{y+2} + \frac{z}{z+2}.$$

Problema 6.15 (OME 2009) *Si* $a, b, c > 0, abc = 1$*, probar que se cumple:*

$$\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2 + \left(\frac{b}{1+bc}\right)^2 + \left(\frac{c}{1+ca}\right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$

Problema 6.16 *Para* a, b, c *positivos, demostrar que*

$$\left(\frac{a+2c}{a+2b}\right)^3 + \left(\frac{b+2a}{b+2c}\right)^3 + \left(\frac{c+2b}{c+2a}\right)^3 \geq 3$$

Problema 6.17 (IMO 1964) *Sean* a, b, c *los lados de un triángulo. Demostrar que*

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

Problema 6.18 (IMO 1983) *Sean* a, b, c *los lados de un triángulo. Demostrar que*

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

Problema 6.19 *Para* a, b, c, d *positivos, probar que* $\boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}}$

Problema 6.20 *Si* $abc = 1$*, probar que* $\boxed{\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}}$.

Problema 6.21 *Si* $a, b, c > 0$*, demostrar que* $\boxed{\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}}$.

Problema 6.22 *Sean* $a, b, c > 0$*. Demostrar que:*

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{2\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{\left(a+b+c+\sqrt[3]{abc}\right)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Problema 6.23 *Si* $a, b, c > 0, abc = 1$*, probar que* $\boxed{\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} \geq 1}$.

Problema 6.24 *Si* a, b, c *son las longitudes de un triángulo, probar que*

$$\frac{3}{2} \leq \frac{b+c}{b+c+2a} + \frac{c+a}{c+a+2b} + \frac{a+b}{a+b+2c} < \frac{5}{3}$$

Problema 6.25 *Si* $x, y, z > 0, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$*, probar que* $\boxed{(x-1)(y-1)(z-1) \geq 8}$.

Problema 6.26 *Sean* a, b, c *números reales positivos tales que* $a + b + c = 1$*. Probar que*

$$\frac{a}{\sqrt{2a+b}} + \frac{b}{\sqrt{2b+c}} + \frac{c}{\sqrt{2c+a}} \leq 1.$$

7. Sugerencias para algunos ejercicios

- 1.13. Usar que $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2,\ldots$ y que $a+b\geq 2\sqrt{ab}\ldots$
- 1.14. Desarrollar y usar que $a^2+b^2\geq 2ab\ldots$
- 1.15. Desarrollar y usar que $a^2b+b^2c+c^2a\geq 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=3abc$.
- 1.16. $a^2b=aab=\sqrt[3]{a^3b^3c^3}\leq\frac{a^3+a^3+b^3}{3}\ldots$
- 1.18. Dos veces la desigualdad de las medias, o también usar la media armónica.
- 1.20. $a^3+a^2b\geq 2\sqrt{a^4b^2}=2a^2b\ldots$
- 1.21. En este momento sólo se puede usar fuerza bruta (eliminar denominadores) y utilizar el Problema 1.16. En secciones siguientes se resolverá esta desigualdad de otras formas.
- 1.22 En los denominadores usar $(b+c)^2\leq 2b^2+2c^2\ldots$
- 2.15. $\frac{a}{b+c}=\frac{a^2}{ab+ac}$ para aplicar C-S en forma de Engel. Sale $\sum\frac{a^2}{ab+ac}\geq algo$, y hay que probar que $algo\geq 2$, que equivale a $a^2+b^2+c^2+d^2\geq 2ac+2bd$, cierto!
- 2.16. Llamando $x=\frac{a}{a+2b},y=\frac{b}{b+2c},z=\frac{c}{c+2a}$, usamos que $x^2+y^2+z^2\geq\frac{(x+y+z)^2}{3}$, y debemos probar que $x+y+z\geq 1$, problema ya resuelto.
- 2.17. Eliminando denominadores queda $ab^2+bc^2+ca^2\geq 3abc$. O se resta $\frac{1}{2}$ a cada término y queda una desigualdad ya resuelta anteriormente.
- 2.18. Usar C-S en la forma $\sqrt{A}+\sqrt{B}\leq\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{A+B}$, y luego probar que $A+B<1$.
- 2.19. Por Hölder $(\sum\frac{a}{mb+nc})(\sum a)(\sum a(mb+nc))\geq(a+b+c)^3$, y después hay que ver que $\frac{(a+b+c)^2}{(m+n)(ab+bc+ca)}\geq\frac{3}{m+n}$.
- 2.20. Aplicar Hölder en su segunda formulación, como se hace en el texto.
- 2.21. Por Hölder $(\sum\frac{a^3}{x})(\sum x)(\sum 1)\geq(\sum a)^3$ y ya está.
- 2.22. Un primer "meneo" por Hölder $(\sum\frac{a^6}{b^2+c^2})(\sum b^2+c^2)(\sum 1)\geq(\sum a^2)^3$. La nueva desigualdad $(\sum a^2)^2\geq\frac{(a+b+c)^4}{9}$ sale por las medias.
- 2.23 Un meneo $(\sum\frac{ab}{\sqrt{ab+2c^2}})(\sum\frac{ab}{\sqrt{ab+2c^2}})(\sum ab(ab+2c^2)\geq(\sum ab)^3\Rightarrow f^2\geq\frac{(\sum ab)^3}{\sum a^2b^2+2\sum abc^2}$, y eso es justo $\sum ab$.
- 3.7. Suponer $a\leq b\leq c$. Se cruzan las sucesiones $(ab\leq ac\leq bc)$ y $(\frac{1}{c}\leq\frac{1}{b}\leq\frac{1}{a})$, a la izquierda se tiene la reordenación de máxima suma, a la derecha no.
- 3.8. Equivalente a $a^8+b^8+c^8\geq a^2b^3c^3+b^2c^3a^3+c^2a^3b^3$. Aplicar reordenación a las sucesiones (a^2,b^2,c^2), (a^3,b^3,c^3), (a^3,b^3,c^3).
- El término derecho $a\cdot\frac{1}{a(b+c)}+\cdots$ está en la reordenación de menor suma posible, ya que si $a\leq b\leq c$ se tiene $a(b+c)\leq b(c+a)\leq c(a+b)$, es decir $\frac{1}{a(b+c)}\geq\frac{1}{b(c+a)}\geq\frac{1}{c(a+b)}$.
- 3.10. Aplicar Chebyshev a $(a_1,\ldots,a_n)$ y $(a_1^{k-1},\ldots,a_n^{k-1})$ (igual orden) $\ldots k$ veces.
- 3.11. Chebyshev y luego las medias en esta forma: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\geq\frac{4}{\sqrt[4]{xyzw}}$.