Preparación para las fases regional y nacional de la Olimpíada Matemática Española 2013

Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León , asaes@unileon.es

Documento 1, enero de 2013

Índice

0. Introducción

Este documento contiene algunos resultados teóricos, útiles y necesarios para la preparación olímpica, pero que lamentablemente en su mayoría ya no se enseñan en el bachillerato. Se intercalan algunos problemas resueltos y otros propuestos.

Para la redacción de estas notas he recolectado abundante material y problemas de distintos sitios web, en especial, de los profesores Francisco Bellot Rosado (Valladolid), Francisco Javier García Capitán (Córdoba), y Cristóbal Sánchez Rubio (Benicassim), autor de una página web destinada a la olimpíada matemática:

http://platea.pntic.mec.es/csanchez/olimprab.htm

Algunos temas específicos serán tratados en profundidad en documentos posteriores (2. Desigualdades y 3. Geometría Avanzada).

La intuición, las ideas felices y la pasión matemática acompañarán de forma continua toda la preparación, pero es difícil incluir ese "material" en estas notas. Por lo cual este documento hará más énfasis en aumentar la base teórica, para que se puedan resolver en poco tiempo problemas mecánicos o rutinarios, y aprovechar el resto del tiempo para pelear los problemas difíciles.

A trabajar y a disfrutar!

1. Aritmética y desigualdades

Números naturales, enteros y reales

Veamos cómo a partir de la siguiente propiedad elemental:

Problema 1.1 (Propiedad arquimediana) *Para todo nr. real x, existe un natural $n > x$.*

Pueden demostrarse propiedades mucho menos triviales en apariencia.

Problema 1.2 *Dados dos reales distintos $a < b$, existe un racional $\frac{m}{n}$ entre a y b, es decir*

$$a < \frac{m}{n} < b$$

Si a, b son de distinto signo, elegimos $m = 0, n = 1$ y resulta $a < 0 < b$. Sean a, b ambos positivos. El problema estará demostrado si conseguimos que se cumpla $an < m < bn$. ¿Cuándo se puede asegurar que en un intervalo entre dos números reales hay seguro un natural m? Cuando ese intervalo tiene longitud mayor que 1, es decir $bn - an > 1$. ¿Cuándo se logra esto? Cuando $n(b-a) > 1$, o de forma equivalente, $n > \frac{1}{b-a}$ (al ser $b - a > 0$, multiplicar o dividir por $b - a$ no cambia el sentido de la desigualdad). Conclusión: la propiedad arquimediana resuelve estre problema, eligiendo n mayor que $\frac{1}{b-a}$.

Si fueran a, b negativos $a < b < 0$, resolvemos el problema para $-a > -b > 0$, encontrando $-b < \frac{p}{q} < -a$, y multiplicamos por -1 cambiando el sentido de la desigualdad: $b > \frac{-p}{q} > a$.

Cierta destreza en desarrollos y factorizaciones elementales

Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
(a+b+c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b) + 6abc \\
a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\
a^n + b^n &= (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b \pm \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \qquad (n \text{ impar})
\end{aligned}$$

Cambios de variable que simplifiquen las cosas

Desigualdad de las medias aritmética, geométrica y armónica

Si $a, b > 0$, se definen la media aritmética $A = \frac{a+b}{2}$, la media geométrica $G = \sqrt{ab}$, y la media armónica $H = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. Entonces $A \geq G \geq H$, y las desigualdades siempre son estrictas si $a \neq b$. Análogamente para n números:

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

La desigualdad más utilizada es la que compara las medias aritmética y geométrica.

Problema 1.3 *Demostrar que la suma de un número positivo y su inverso es ≥ 2.*

Problema 1.4 *Si $a, b, c \geq 0$, probar que $a^2 + b^2 \geq 2ab$ y $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.*

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$(ab+cd)^2 \leq (a^2+c^2)(b^2+d^2)$. De forma general:

$$(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2 \leq (a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2)$$

O de forma equivalente

$$a_1b_1+\cdots+a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}$$

Problema 1.5 (Desigualdad de Bernoulli) *La desigualdad*

$$(1+h)^n \geq 1+nh$$

se cumple para todos par de números reales $h \geq -1, n \geq 1$. Si n es un número par positivo, la desigualdad también es válida para todo h real.

Problema 1.6 *Demostrar que la sucesión $a(n) = (1+\frac{1}{n})^n$ es estrictamente creciente (el límite de esta sucesión cuando $n \to \infty$ es el número e, base del logaritmo neperiano).*

Los siguientes ejercicios son de calentamiento, solamente un aperitivo. En un documento aparte se tratará de forma detallada el tema de desigualdades.

Problema 1.7 *¿Cuál de estos números $\{1000^{1000}, 1001^{999}\}$ es mayor?*

Problema 1.8 *Probar que $3^{200} > 2^{300}$.*

Problema 1.9 *¿Cuál de estos números $\{9\sqrt{10!}, 10\sqrt{9!}\}$ es mayor?*

Problema 1.10 *Si p, q son reales positivos con $p+q=1$, probar que*

$$\left(p+\frac{1}{p}\right)^2+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Problema 1.11 *Si $a, b, c > 0$, probar que $a^4+b^4+c^2 \geq 2\sqrt{2}abc$.*

Problema 1.12 *Si a, b, c son números reales tales que $a^2+b^2+c^2=1$, probar que*

$$-\frac{1}{2} \leq ab+bc+ca \leq 1.$$

Problema 1.13 (No supe en qué sección clasificarlo) -
Hallar todas las soluciones (x, y, z) reales del sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x^2 & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y^2 & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z^2 & = & 1 \end{array}\right.$$

2. Divisibilidad y Teoría de Números

Divisibilidad, primos, factorización, mcd, etc.

División euclídea de a entre b con cociente q y resto r.
$a = bq + r$, con $0 \leq r \leq b - 1$.

Números primos: factorización y propiedades

Factorización en potencias de primos.
Si p divide a xy y no divide a x, entonces divide a y.

Máximo común divisor y algoritmo de Euclides

Si $d = mcd(a, b)$, existen a', b' con $a = da', b = db'$ y $mcd(a', b') = 1$.
Si $c|ab$ y $mcd(c, a) = 1$, entonces $c|b$.

En una división con resto $a = bq + r$, todo divisor de a y de b es divisor de b y de r, y recíprocamente. Es decir, $\boxed{mcd(a, b) = mcd(b, r)}$. Con este truco (en el cual se basa el algoritmo de Euclides) se puede hacer inducción.

O también, por ejemplo, así se demuestra que la fracción $\frac{n^3+2n}{n^4+3n^2+1}$ es irreducible para todo n entero positivo: Se escribe $n^4 + 3n^2 + 1 = n(n^3 + 2n) + n^2 + 1$, luego

$$mcd(n^4 + 3n^2 + 1, n^3 + 2n) = mcd(n^3 + 2n, n^2 + 1).$$

Y otra división con resto: $n^3 + 2n = n(n^2 + 1) + 2n$, con lo cual $mcd(n^3 + 2n, n^2 + 1) = mcd(n^2 + 1, 2n) = 1$.

Identidad de Bézout

Si $mcd(a, b) = d$, existen enteros x, y tales que $ax + by = d$.
Útil para resolver problemas del estilo:

Problema 2.1 *¿cómo obtener exactamente un litro de agua si se dispone de un cubo de 13 litros, otro de 5 litros y una fuente ilimitada de agua?*

Solución: dado que $mcd(13, 5) = 1$, podemos escribir $1 = 13a + 5b$, por ejemplo $13 \cdot 2 - 5 \cdot 5$, es decir $1 = 13 + 13 - 5 - 5 - 5 - 5 - 5$. Cada operación $+13$ se interpreta como "llenar el cubo de 13 litros", y cada operación -5 corresponde a vaciar el contenido del de 5 litros. Así, al llenar una vez el cubo de 13 litros y pasar su contenido sucesivas veces al de 5 litros, acabamos con 3 litros colocados dentro del cubo de 5. Una nueva llenada del cubo grande nos da $13 + 3 = 16$ litros en total, que se transformarán en 1 litro al vaciar 3 veces el cubo de 5.

Operaciones modulares

Saber trabajar módulo p (primo) o en general módulo cualquier n.
Si $mcd(a, b) = 1$, considerar los restos módulo b de la sucesión

$$a, 2a, 3a, \ldots, na, \ldots$$

¿Qué pasa si hay dos valores repetidos $an \equiv am \pmod{b}$? Significaría que $an - am \equiv 0 \pmod{b}$, es decir b divide al número $a(n - m)$. Pero como $mcd(a, b) = 1$, necesariamente b debe dividir a $m-n$. Resumiendo, hemos probado que la sucesión $\{an\}$ módulo b sólo repite valores de b en b, en particular los $b-1$ primeros valores

$$a, 2a, 3a, \ldots, (b-1)a$$

son todos distintos $(\bmod\, b)$, y coinciden (salvo el orden) con los restos $\{1, 2, \ldots, b-1\}$ (no puede aparecer el 0 porque $an \equiv 0 \pmod b$ implicaría que $b|n$). O sea que aparece el 1 en algún momento, es decir, existe n tal que $an \equiv 1 \pmod b$, lo que quiere decir que a tiene inverso módulo b.

Si p es primo y no divide a a, existe el inverso de a módulo p. En particular, todas las ecuaciones de la forma

$$ax \equiv b \pmod p$$

tienen solución $x = \frac{b}{a} \pmod p$.

Pequeño teorema de Fermat

Si p es primo y no divide al número a, entonces $\boxed{a^{p-1} \equiv 1 \pmod p}$.

Para todo a (sea o no múltiplo de p) $\boxed{a^p \equiv a \pmod p}$.

Teorema de Wilson

Si p es primo $\boxed{(p-1)! \equiv -1 \pmod p}$.

Función ϕ de Euler

$\phi(n) =$ la cantidad de enteros a entre 1 y n verificando $mcd(a, n) = 1$.

$\phi(n)$ coincide con el número de restos que tienen inverso módulo n.

Si m, n son primos entre sí o coprimos ($mcd(m, n) = 1$), se tiene que $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. Si la factorización de n en potencias de primos es $n = p_1^{r_1} \cdots p_t^{r_t}$, entonces

$$\varphi(n) = (p_1 - 1)p_1^{r_1-1} \cdots (p_t - 1)p_t^{r_t-1},$$

por ejemplo $\varphi(10) = \varphi(2 \cdot 5) = 1 \cdot 4$, $\varphi(3^3 \cdot 5^2) = 2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 5 = 360$.

Potencias modulares: si a, n son enteros, la sucesión de potencias

$$\{a, a^2, a^3, a^4, \ldots, \}$$

módulo n es periódica. El período es un divisor de $\varphi(n)$. En particular, si n es primo, el período es divisor de $n-1$.

Generalización del teorema de Fermat

Si $mcd(a, n) = 1$,

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$$

Raíz primitiva módulo p

Si p es primo, existe un g entre 1 y $p-1$ tal que la sucesión de potencias de g módulo p recorre todos los posibles restos módulo p. Por ejemplo, para $p = 11$, podemos elegir $g = 2$ y funciona bien:

$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 5$	$2^5 = 10$	$2^6 = 9$	$2^7 = 7$	$2^8 = 3$	$2^9 = 6$	$2^{10} = 1$

Ya sabiendo que el 2 es un generador válido, se puede demostrar que también vale como generador cualquier potencia 2^k, si $mcd(k, 10) = 1$. Demostrarlo.

Cuadrados módulo p

Un número a se llama *residuo cuadrático módulo* p si es congruente con un cuadrado módulo p. Por lo anterior, a es congruente con un cuadrado módulo p si y sólo si a es una potencia par del generador g.

Problema 2.2 *Si p es un primo congruente con 3 módulo 4 (por ejemplo 3, 7, 11, ...), entonces no existe ningún número natural n tal que n^2+1 sea múltiplo de p.*

Solución. Si existieran n, k tal que $n^2+1 = kp$, tendríamos la congruencia $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Elevando a la potencia $\frac{p-1}{2}$ obtendríamos $(\bmod\, p)$:

$$\left(n^2\right)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{impar} = -1$$

ya que $\frac{p-1}{2}$ es impar por ser $p \equiv 3 \pmod{4}$. Pero por otra parte tenemos que

$$\left(n^2\right)^{\frac{p-1}{2}} = n^{2\cdot\frac{p-1}{2}} = n^{p-1} = 1 \pmod{p}$$

por el teorema de Fermat, absurdo. Esta contradicción prueba que -1 no puede ser un residuo cuadrático si el primo p es $\equiv 3 \pmod{4}$.

Demostraciones por inducción

En algún momento hay que saber hacer una demostración por inducción. Por ejemplo, demostrar las fórmulas

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

La fórmula $1 + \cdots + n = n(n+1)/2$ se cumple claramente para $n=1$.

Sea $S(n) = 1 + \cdots + n$. Asumiendo válido que $S(k) = \frac{k(k+1)}{2}$ para todo $k < n$, probaremos que $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Escribimos $S(n) = n + S(n-1)$. Como $S(n-1)$ podemos asumir que vale $\frac{(n-1)n}{2}$, entonces

$$S(n) = n + \frac{(n-1)n}{2} = n\left(1 + \frac{n-1}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2},$$

como queríamos demostrar.

Sea $T(n) = 1^2 + \cdots + n^2$. La segunda fórmula $T(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ se verifica para $n = 1$. Para $n > 1$, escribimos $T(n) = n^2 + T(n-1)$ y asumimos que $T(n-1) = \frac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6}$, es decir

$$T(n) = n^2 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = n\left(n + \frac{(n-1)(2n-1)}{6}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Parte entera y funciones recurrentes

La parte entera de un número real x, denotada por $[x]$ o $E(x)$, es el mayor entero que es $\leq x$. La parte decimal de x, usualmente denotada por $\{x\}$, es $x - [x]$. Decir que "$[x] = n$" es exactamente lo mismo que dar estas dos desigualdades:

$$n \leq x < n+1,$$

(es decir n es $\leq x$ pero $n+1$ ya se pasa). Con la doble desigualdad anterior se simplifican la mayoría de ejercicios que involucran a la parte entera.

Si $x = \frac{a}{b}$ es un número racional, es conveniente hacer la división euclídea de a entre b, ya que la parte entera y decimal de x están relacionadas con el cociente y resto de dividir a entre b, de esta manera:

$$\text{Si } a = bq + r, \text{ con } 0 \leq r < b \Rightarrow [\frac{a}{b}] = q \text{ y } \{\frac{a}{b}\} = \frac{r}{b}.$$

Si $a = bq+r$, una función definida de forma recurrente como $f(a)$ en función de $f(q)$ y $f(r)$, hacen sospechar una relación con la expresión de a en base b. Por ejemplo, la función definida por

$$f(1) = 1, f(2n) = f(n), f(2n+1) = f(n) + 1$$

da como resultado el número de unos en la expresión binaria. La función:

$$f(n) = -f\left(\left[\frac{n}{3}\right]\right) - 3\left\{\frac{n}{3}\right\}$$

propuesta en la OME 2010, está relacionada con la expresión de n en base 3, estudiando los dígitos que ocupan posiciones impares y pares ...

Máxima potencia de un primo que divide a un factorial

Sea p un primo. La máxima potencia p^k que divide a $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ es

$$k = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] \cdots$$

Dem: en el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ hay $[n/p]$ múltiplos de p, $[n/p^2]$ múltiplos de p^2, etc.

Problemas

Problema 2.3 *Demostrar que para todo n entero, n^2 es congruente con 0 o con 1 módulo 4, en particular los números $4k+2$ y $4k+3$ nunca son cuadrados perfectos.*

Problema 2.4 *Si n es impar, entonces $n^2 \equiv 1 \pmod 8$.*

Problema 2.5 *Encontrar todos los pares de enteros (x, y) tales que $x^2 + y^2 = 49$.*

Problema 2.6 *Encontrar el último dígito de 7^{21}.*

Problema 2.7 *Si a es múltiplo de p, entonces $(a+1)^n - 1$ es múltiplo de p para todo entero positivo n.*

Problema 2.8 *Determinar todos los enteros positivos n tales que $3^n + 4$ es divisible por 7.*

Problema 2.9 *Sea n cualquier número entero. Demostrar que $n^5 - n$ es múltiplo de 30.*

Problema 2.10 *Calcular la suma*

$$1 + 11 + 1111 + \cdots + 111 \overset{n \text{ unos}}{\cdots} 1.$$

Problema 2.11 *Demostrar que ningún número de la sucesión $11, 111, 1111, \ldots$ puede ser un cuadrado perfecto.*

Problema 2.12 *¿Para qué valores de p es $2^{2p} + 7 \cdot 2^p + 1$ un cuadrado?*

Problema 2.13 *Determinar para qué valores de $n > 0$ el número*

$$20122012 \overset{n \text{ bloques}}{\cdots} 2012$$

es múltiplo de 126.

Problema 2.14 *Demostrar que si en una progresión aritmética de números naturales hay un elemento que es un cuadrado perfecto, entonces la progresión contiene infinitos cuadrados perfectos.*

Problema 2.15 *Si p es un primo distinto de 2 y de 5, demostrar que existen infinitos múltiplos de p de la forma $111\ldots1$ (escrito sólo con unos).*

Problema 2.16 *Se forman los números 49, 4489, 444889, ..., y así sucesivamente, siempre insertando un 48 en la parte central del número anterior. Demostrar que todos estos números son cuadrados perfectos.*

Problema 2.17 *Averiguar en cuántos ceros termina el factorial de 2012. ¿Y el de un millón?*

Problema 2.18 *Para cualquier número natural n, determinar un método para dar n números consecutivos tales que ninguno sea primo. Ayuda: pensar en los factoriales.*

Problema 2.19 *Sea p un número primo impar, y sea x un número natural tal que*

$$x^2 \equiv a \pmod{p}$$

Demostrar que existe y tal que

$$y^2 \equiv a \left(\operatorname{mod} p^2\right)$$

Ayuda: como $x^2 - a$ es múltiplo de p, también $(x + ip)^2 - a$ es múltiplo de p para todo i. Se trata de encontrar un i tal que $(x + ip)^2 - a$ sea múltiplo de p^2. Ya hay un factor p, hay que fabricar otro.

Problema 2.20 *Un número x de n cifras tiene la siguiente propiedad: si se extrae la última cifra de x y se la coloca al principio, se obtiene un número y que es el doble de x. Hallar el menor valor posible de n para que sea posible esta situación, y calcular el número x.*

Problema 2.21 *Demostrar que para n, k enteros, k impar, la fracción:*

$$\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{1 + 2 + \cdots + n}$$

siempre es entera. Pista: separar casos según n sea par o impar.

Problema 2.22 *Sean $0 < a < b < 1$. Demostrar que existen infinitos pares de enteros positivos (m, n) que verifican la condición*

$$a < \frac{2mn}{m^2 + n^2} < b$$

Problema 2.23 *Demostrar que el número $n^4 + 4$ no es primo para ningún valor de n entero positivo. La factorización resultante $n^4 + 4 = (n^2 - algo)(n^2 + algo')$ se conoce como identidad de Sophie Germain.*

Problema 2.24 *El número $\dfrac{(2n)!}{n!n!}$ es natural para todo n natural.*

3. Polinomios

No más raíces que grado

Si un polinomio $f(x)$ de grado n tiene más de n raíces, es el polinomio nulo.

Teorema del resto

Si $f(x) = (x - a)q(x) + r$, entonces el resto r coincide con el valor de $f(a)$. En particular, a es raíz de $f(x)$ si y sólo si $f(x)$ es divisible por $x - a$.

Teorema de la raíz racional

Sea $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ un polinomio con coeficientes enteros. Si p tiene una raíz racional r/s (expresada como fracción irreducible), entonces se debe cumplir que $r|a_0$ y $s|a_n$. Si además p es mónico ($a_n = 1$), las únicas posibles raíces racionales son enteras. Por ejemplo, $x^3 - 3x^2 + x - 3$ sólo puede tener raíces $\pm 1, \pm 3$ (divisores de -3).

Relaciones de Cardano-Vieta entre coeficientes y raíces

Si un polinomio de segundo grado $f(x) = x^2 + bx + c$ tiene dos raíces p, q, se puede factorizar $f(x) = (x - p)(x - q)$. Igualando potencias de x en la expresión $x^2 + bx + c = (x - p)(x - q)$ se obtiene $p + q = -b, pq = c$.

Para un polinomio de tercer grado $x^3 + bx^2 + cx + d = (x - p)(x - q)(x - r)$:

$$p + q + r = -b, \quad pq + qr + rp = c, \quad pqr = d$$

Y en general, si $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene raíces $r_1, \ldots, r_n$ (puede haber repeticiones), entonces el coeficiente a_{n-k} puede expresarse como $(-1)^{n-k}$ veces la suma de todos los productos de k raíces. Por ejemplo, el coeficiente de x^2 en la expresión

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - e)$$

es igual a $abc + abd + abe + acd + ace + ade + bcd + bce + bde + cde$.

Criterio de irreducibilidad de Eisenstein

Sea $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio con coeficientes enteros. Sea p un primo que divide a todos los coeficientes de f excepto a a_n, y tal que p^2 no divide a a_0. Entonces $f(x)$ es **irreducible**, en el siguiente sentido: no es posible factorizar $f(x) = g(x)h(x)$, con g, h ambos de grado estrictamente menor que f.

Primero veamos qne f no puede tener una raíz entera. Si existiera $r \in \mathbb{Z}$ tal que

$$f(r) = a_n r^n + \underbrace{a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0}_{\text{múltiplo de } p} = 0,$$

debería ser $a_n r^n$ un múltiplo de p. Dado que p no divide a a_n, p debe dividir a r^n, para lo cual p debe dividir a r. Pero entonces miramos la igualdad anterior módulo p^2:

$$f(r) = \underbrace{a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r}_{\text{múltiplo de } p^2} + \underbrace{a_0}_{\text{éste no}} = 0,$$

Absurdo. Luego f no puede ser divisible por un factor de grado uno $x - r$. De forma similar (con algo más de trabajo) se demuestra que tampoco es posible una factorización de f con dos términos de grado ≥ 2.

Problema 3.1 *El polinomio* $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^5-1}{x-1}$ *es irreducible.*

El criterio de Eisenstein no es aplicable directamente, pero sí tras una pequeña manipulación, reemplazando x por $x+1$. Si $g(x) = f(x+1)$, entonces

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{(x+1)^5 - 1}{(x+1) - 1} &= \frac{x^5 + \binom{5}{1}x^4 + \binom{5}{2}x^3 + \binom{5}{3}x^2 + \binom{5}{4}x + 1 - 1}{x} \\ &= x^4 + \binom{5}{1}x^3 + \binom{5}{2}x^2 + \binom{5}{3}x + \binom{5}{4} \end{aligned}$$

Como el 5 es primo, todos los coeficientes binomiales $\binom{5}{i}$, para $1 \leq i \leq 4$, son múltiplos de 5, y el último $\binom{5}{4}$ es igual a 5, luego no es múltiplo de 5^2. En consecuencia, ahora sí se puede aplicar el criterio de Eisenstein, con lo cual el polinomio $g(x)$ es irreducible. Para terminar, está claro que f también debe ser irreducible, ya que si fuera $f(x) = u(x)v(x)$, se tendría $f(x+1) = u(x+1)u(x+1)$, es decir, $g(x) = u(x+1)v(x+1)$ sería una factorización no trivial de g, lo cual se ha visto que es imposible.

Nota: el problema anterior se puede generalizar para cualquier número primo en vez del 5. Si p es primo, siempre será irreducible el polinomio

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x^2 + x + 1$$

Teoría de la relatividad de Einstein

Desafortunadamente, este tema está fuera del alcance de nuestro humilde programa.

Teorema de Gauss

Si un polinomio $f(x)$ con coeficientes enteros puede ser factorizado como producto de polinomios racionales, entonces también puede factorizarse como producto de polinomios enteros.

Polinomios con factores repetidos

Si un polinomio tiene una raíz repetida a, a también es raíz de la derivada del polinomio. Por ejemplo, si $f(x) = (x-2)^2(x+1)$, al hacer su derivada obtenemos $f'(x) = 2(x-2)(x+1)+(x-2)^2$, un polinomio divisible por $x-2$, o sea que tiene raíz 2.

Pero ¿cómo darse cuenta de que el polinomio en forma expandida $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ tiene o no alguna raíz repetida, sin calcular sus raíces? Lo que se hace es calcular el $mcd(f, f')$ (ojo, el mcd puede tener coeficientes racionales):

$$mcd(f, f') = mcd(x^3 - 3x^2 + 4, 3x^2 - 6x) \overset{\text{Euclides}}{= \cdots\cdots =} x - 2$$

De forma general, un polinomio f tiene un factor repetido d ($f = d^k g$, con $k > 1$) si y sólo si d divide al $mcd(f, f')$.

El cambio de variable $z = x + \frac{1}{x}$

Veamos cómo son las potencias de $z = x + \frac{1}{x}$:

$$z^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$$

$$z^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3z \quad \Rightarrow \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = z^3 - 3z$$

De forma similar, para todo n se tiene que $x^n + \frac{1}{x^n}$ es expresable en potencias de $z = x + \frac{1}{x}$. Una posible aplicación es el cálculo de raíces de polinomios de grado par con coeficientes simétricos, por ejemplo

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{(x^2 + \frac{1}{x^2})}_{z^2-2} -4 \underbrace{(x + \frac{1}{x})}_{z} +2 = 0 \\ &\Leftrightarrow z^2 - 4z = 0 \end{aligned}$$

La ecuación anterior tiene soluciones $z = 0, z = 4$. Para resolver la ecuación original debemos resolver $x + 1/x = 0$ y $x + 1/x = 4$.

Problema 3.2 *Demostrar que para todo entero n, el número $n^4 - 20n^2 + 4$ es compuesto (escribir como diferencia de cuadrados, factorizar y probar que ninguno de los factores puede ser ± 1).*

Problema 3.3 *Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes enteros, de manera que existen cuatro enteros distintos a, b, c, d con $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5$. Probar que no existe ningún entero k tal que $f(k) = 8$. Pista: factorizar $f(x) - 5 = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)R(x)$ y sustituir $x = k$.*

Problema 3.4 *Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Demostrar que si existe un entero k tal que ninguno de los enteros $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ es divisible por k, entonces $P(x)$ no tiene raíces enteras.*

Problema 3.5 *Sean a, b enteros. Demostrar que la ecuación $(x - a)(x - b)(x - 3) + 1 = 0$ admite a lo sumo una solución entera.*

Problema 3.6 *Sean p, q, r las tres raíces reales del polinomio $x^3 - 3x + 1$. Se define la sucesión $\{s(n) = p^n + q^n + r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Utilizando las relaciones entre coeficientes y raíces, encontrar una relación de recurrencia para $s(n+3)$ en función de $s(n+2), s(n+1), s(n)$ y demostrar que $s(n)$ es entero todo n. Determinar el resto de dividir $s(2012)$ entre 7.*

Problema 3.7 *Hallar todos los polinomios $P(t)$ de una variable que cumplen*

$$P(x^2 - y^2) = P(x + y)P(x - y)$$

para todos los números reales x, y.

Problema 3.8 *Probar que la gráfica del polinomio $P(x)$ es simétrica respecto del punto A de coordenadas (a, b) si y sólo si existe un polinomio $Q(x)$ tal que*

$$P(x) = b + (x - a)Q((x - a)^2)$$

Problema 3.9 *El polinomio $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ es irreducible (Eisenstein $x \to x + 1$).*

Problema 3.10 *Dados los polinomios $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$, $Q(x) = x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1$, hallar las condiciones que deben cumplir los números reales a, b, c ($a \neq c$) para que $P(x)$ y $Q(x)$ tengan dos raíces comunes, y resolver en ese caso las ecuaciones $P(x) = 0, Q(x) = 0$.*

Problema 3.11 *Determinar todas las soluciones del sistema*

$$\left\{x+y+z=w, \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{w}\right\}$$

Problema 3.12 *Determinar todas las soluciones enteras de la ecuación*

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3$$

Problema 3.13 *¿Para qué valores de n el polinomio $1+x^2+\cdots+x^{2n-2}$ es divisible por $1+x+\cdots+x^{n-1}$?*

Problema 3.14 *Demostrar que existe un único natural n tal que $2^8+2^{11}+2^n$ es cuadrado perfecto.*

4. Geometría

Declaración de intenciones:

Estas notas están orientadas a una Geometría de demostrar cosas, más que de calcular. Demostrar propiedades que se cumplen en figuras lo más genéricas posibles. Aparte de los ángulos rectos y los que puedan surgir en condiciones de simetría (30,45,60), es muy muy muy raro que aparezcan ángulos específicos. Las distancias nunca serán numéricas, siempre abstractas $a, b, c \ldots$ lo importante serán las relaciones entre elementos, más que su valor.

Igualdad y semejanza de triángulos

Dos triángulos son iguales o congruentes si tienen los 3 ángulos y los 3 lados iguales. Pero la gracia es que a veces se puede asegurar la igualdad con muchos menos datos, cuando coinciden en 3 "elementos" (ángulos o lados) suficientes para construir el triángulo, por ejemplo: { Tres lados, Dos lados y el ángulo que forman entre ellos, Un lado y los dos ángulos adyacentes }.

Hay un cuarto criterio (dos lados y el ángulo opuesto al mayor de los lados) que casi nunca se utiliza en problemas, porque en general no hay datos suficientes para comparar ángulos y distancias y saber si una cantidad es mayor que otra, ya que usualmente trabajaremos con relaciones abstractas. Un caso excepcional en que sí que se usa este cuarto criterio: si dos triángulos rectángulos tienen iguales un cateto y la hipotenusa, son congruentes.

A veces podemos deducir una igualdad de triángulos porque son correspondientes en un movimiento (traslación, simetría, rotación, etc.)

De forma similar, dos triángulos son semejantes si tienen los 3 ángulos iguales y los 3 lados proporcionales. En los siguientes casos hay datos suficientes para asegurar la semejanza, cuando tienen: { Los 3 ángulos iguales (basta con 2), Un ángulo igual y los segmentos adyacentes proporcionales, Los 3 lados proporcionales }.

A veces detectamos una semejanza cuando los triángulos son correspondientes en una transformación de semejanza (homotecia, rotohomotecia, etc.)

La aplicación principal de la congruencia y semejanza de triángulos es que a partir de unos pocos datos conocidos de ángulos y distancias se pueden deducir relaciones nuevas.

Problema 4.1 (Igualdad y semejanza) -

1. *ABC triángulo acutángulo con alturas AA_1, BB_1. Probar que $CA_1.CB = CB_1.CA$.*

2. *ABC triángulo isósceles con $AB = AC$. Las perpendiculares por B, C a AB, AC respectivamente se cortan en D. Probar que $DB = DC$.*

3. *El trapecio $ABCD$ verifica $AB||CD$ y $BC = AD$. Probar que $AC = BD$ (Proyectar D, C sobre A, B y buscar triángulos iguales).*

4. *ABC rectángulo en C con altura CH. Probar que $AC^2 = AB \cdot AH$ y $CH^2 = AH \cdot BH$.*

5. *En el lado BC del triángulo ABC se elige un punto A_1 tal que $BA_1 : A_1C = 2 : 1$. ¿En qué proporción divide la mediana CC_1 al segmento AA_1?*

6. *Si un triángulo ABC de lados a, b, c y ángulos α, β, γ verifica $\alpha = 2\beta$, demostrar que $a^2 = (b + c)b$. Sin trigonometría! (Fabricar la distancia $b + c$, construyendo un punto D en la prolongación de AB tal que $AD = AC$).*

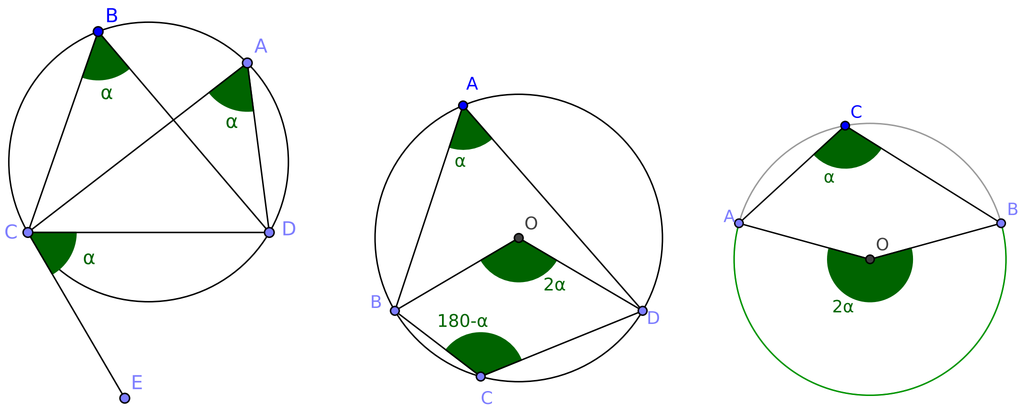
7. *Sea K el punto medio del lado AB en el cuadrado $ABCD$. El punto L divide a la diagonal AC en la razón $AL : LC = 3 : 1$. Probar que $K\widehat{L}D$ es un ángulo recto.*

8. *Sea ABC un triángulo rectángulo en B. Sean $ABMP$ y $ACNQ$ dos cuadrados exteriores al triángulo ABC. Demostrar que PC y BQ son perpendiculares.*

Aritmética de ángulos

Reconocer ángulos iguales cuando son correspondientes entre paralelas, opuestos por el vértice, etc. Conocer la suma de ángulos en un triángulo, cuadrilátero, n-ágono, etc. Encontrar simetrías, triángulos isósceles, etc.

Ángulos inscritos y cuadriláteros inscriptibles.



Arco capaz: cuerdas iguales inscriben ángulos iguales

Si A, B están en el mismo arco de circunferencia respecto a CD, se tiene la igualdad de ángulos "inscritos" $\widehat{CAD} = \widehat{CBD} = \alpha$ (primera figura). El arco al cual pertenecen A, B se llama *arco capaz* de ángulo α respecto al segmento CD. Ese arco es el lugar geométrico de todos los puntos P tales que $\widehat{CPD} = \alpha$.

Ángulo cuerda-tangente igual al inscrito

La recta tangente EC forma con la cuerda CD un ángulo igual al inscrito en dicha cuerda. Esto vale para detectar condiciones de tangencia.

Ángulos opuestos suman 180

En la segunda figura, la suma de los ángulos opuestos en A y en C vale 180, al igual que la suma de los ángulos en B y en D.

Ángulo central es el doble del inscrito

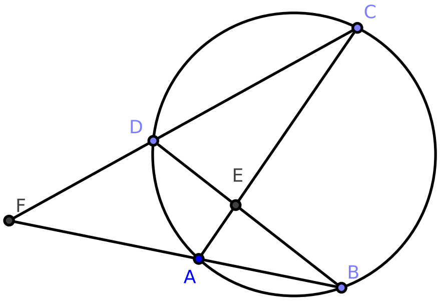
Esto se ve en la segunda figura. Ojo con los ángulos inscritos obtusos, para los cuales el central es mayor que 180! (ver tercera figura).

Criterios para detectar que un cuadrilátero es inscriptible:

Para A, B, C, D en la posición relativa de la primera figura, si $\widehat{CAD} = \widehat{CBD} = \alpha$ entonces $ABCD$ es inscriptible.

Para A, B, C, D en la posición relativa de la segunda figura, si $\widehat{A} + \widehat{C} = 180$ entonces $ABCD$ es inscriptible.

Ángulos entre cuerdas: semisuma y semidiferencia de arcos centrales



$$A\widehat{E}D = \frac{\widehat{BC} + \widehat{AD}}{2}, \qquad A\widehat{F}D = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AD}}{2},$$

donde $\widehat{BC}$ denota el ángulo central $B\widehat{O}C$, etc.

La técnica de los cuadriláteros inscriptibles permite a partir de algunos ángulos conocidos calcular otros ángulos nuevos.

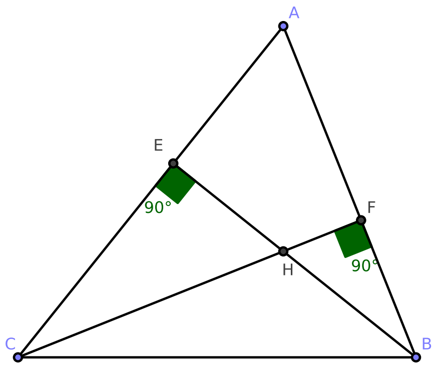
Veamos un ejemplo:

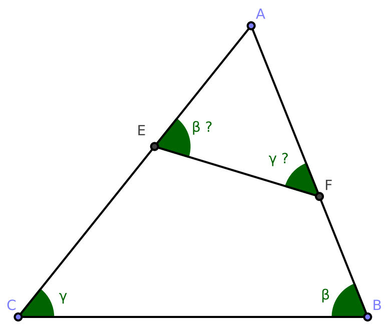
Problema 4.2 *En el triángulo ABC de la figura, H es intersección de las alturas BE y CF. Se pide:*

(i) Calcular la inclinación de la recta EF, que resulta ser “antiparalela” a BC: forma con las rectas AB, AC ángulos β, γ “cruzados” respecto a los β, γ del triángulo ABC.

(ii) Demostrar que la recta AH es perpendicular a BC (o sea, es la tercera altura).

(iii) Si M es el punto medio de BC, entonces las rectas ME, MF son tangentes a la circunferencia que pasa por A, E, F (y por H).





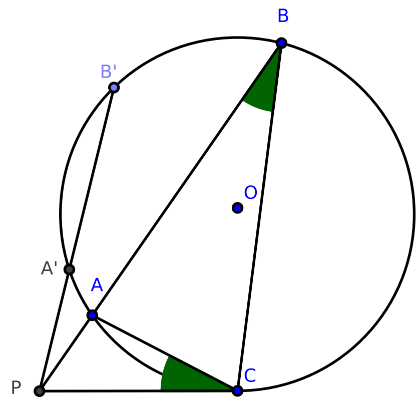
Solución: primero observar que solamente usando aritmética elemental con los ángulos de la figura no hay manera de determinar la inclinación de las rectas EF, AH. Pero sabemos que el cuadrilátero $BCEF$ es inscriptible, ya que E, F están en el arco capaz de 90 grados de base BC. Por lo tanto $\widehat{EFC} = \widehat{EBC}$, ángulo conocido: $90 - \gamma$. Esto contesta a la primera pregunta: $\widehat{AFE} = \gamma$ porque junto con $\widehat{EFC}$ y $\widehat{CFB}$ debe completar 180. Para contestar a la segunda cuestión, miramos el cuadilátero $AFHE$, que también es inscriptible porque los ángulos opuestos en F y E suman 180. En ese cuadrilátero ya está agotada toda la información relativa a los ángulos entre las rectas que unen los lados, no obtendremos ninguna información nueva si no hacemos intervenir las diagonales AH y EF. Nuevamente las propiedades de los inscriptibles acuden en nuestra ayuda:

$$\widehat{EAH} = \widehat{EFH} = 90 - \gamma \text{ (ya calculado antes),}$$

lo cual determina la inclinación de AH, concluyendo que $AH \perp BC$.

(iii) Pista: como M es el centro de la circunferencia de diámetro BC y esa circunferencia pasa por E, F, se pueden deducir las inclinaciones de las rectas ME, MF y ver que son justamente las inclinaciones que aseguran las condiciones de tangencia pedidas.

Potencia de un punto a una circunferencia



Los triángulos PAC y PCB son semejantes porque tienen dos ángulos iguales. Por lo tanto, $\frac{PC}{PA} = \frac{PB}{PC}$, es decir

$$PA.PB = PC^2$$

Lo mismo para A', B', es decir

$$PA.PB = PA'.PB'$$

Para cualquier recta desde P que corte a la circunferencia en dos puntos A, B, el producto $PA.PB$ es constante, y se llama potencia del punto respecto a la circunferencia. En los casos límites la recta por P es tangente en C, luego la potencia es PC^2, y concide con $PO^2 - r^2$, donde O es el centro y r el radio de la circunferencia.

Criterio para detectar si 4 puntos A, B, B', A' están en una misma circunferencia:

Si construimos $P = AB \cap A'B'$ y conseguimos demostrar que $PA.PB = PA'.PB'$, entonces los 4 puntos A, B, B', A' están en una misma circunferencia.

Análogamente, si tenemos 3 puntos ABC y un punto P en la recta AB, y conseguimos demostrar que $PA.PB = PC^2$, entonces la recta PC es tangente a la circunferencia que pasa por ABC.

Problema 4.3 *Dado un segmento AB, hallar el lugar geométrico de los puntos P tales que la diferencia de cuadrados $PA^2 - PB^2$ es constante. Pista: es una recta perpendicular a AB.*

El problema anterior también sirve para demostrar que $CD \perp AB$, en el caso en que se cumple que $CA^2 - CB^2 = DA^2 - DB^2$.

Eje radical de dos circunferencias

Es el conjunto de puntos con igual potencia a dos circunferencias dadas. Si las circunferencias se cortan en dos puntos distintos, el eje es la recta que pasa por esos dos puntos. Si las circunferencias tienen una tangente y un punto de tangencia común, el eje es esa tangente común. Si el eje radical de dos circunferencias C_1, C_2 se corta con el eje radical de C_2, C_3 en un punto P, dicho punto tiene igual potencia a las tres circunferencias, luego necesariamente está en el eje radical de C_1, C_3.

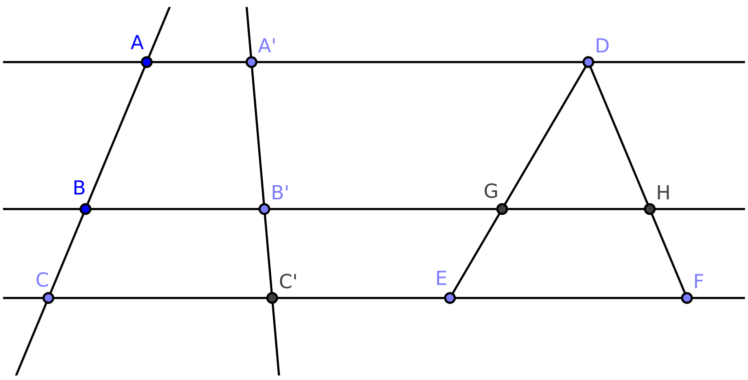
Problema 4.4 *Una circunferencia pasa por A, B. Una segunda circunferencia pasa por A, B y por otros dos puntos C, D. Sea $E = AB \cap CD$. Una tercera circunferencia corta a la segunda en C, D y a la primera en M, N. Demostrar que M, N, E están alineados.*

Teorema de Thales

Sean A, B, C y A', B', C' puntos alineados tales que AA', BB' y CC' son paralelas. Entonces

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Es decir, los segmentos entre paralelas son proporcionales.



También vale el resultado recíproco: si los segmentos son proporcionales, las rectas son paralelas. Por ejemplo, si en la figura de la derecha tenemos una cualquiera de las siguientes proporcionalidades:

$$\frac{DG}{DE} = \frac{DH}{DF}, \qquad \frac{DG}{GE} = \frac{DH}{HF}, \qquad \frac{EG}{ED} = \frac{FH}{FD}, \qquad \frac{DG}{DE} = \frac{DH}{DF}, \frac{GH}{EF} \qquad , \text{etc.}$$

entonces podemos asegurar que EF y GH son paralelas.

Problema 4.5 *En cualquier cuadrilátero, si se unen los puntos medios de los lados se obtiene un paralelogramo cuyos lados son paralelos a las diagonales del cuadrilátero de partida.*

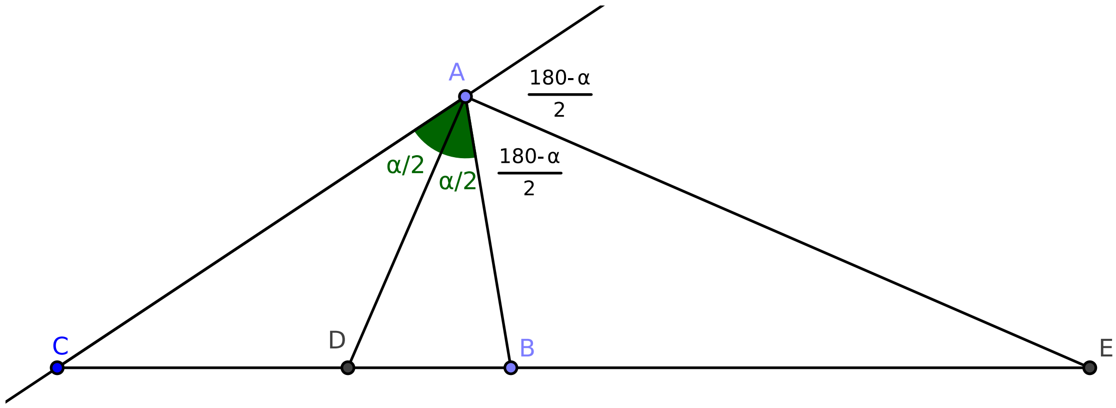
Problema 4.6 *En un paralelogramo, las bisectrices son perpendiculares y paralelas entre sí, y sus 4 puntos de corte están situados sobre las paralelas medias (rectas que unen puntos medios de lados opuestos).*

Problema 4.7 (Teorema de la bisectriz) *En el triángulo ABC, la recta BC corta a la bisectriz interior de A en el punto D y a la bisectriz exterior de A en E (se supone ABC no isósceles). Entonces*

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad y \quad = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}.$$

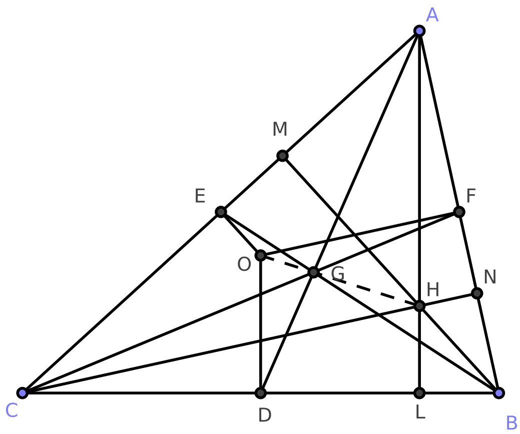
Además, el ángulo $D\widehat{A}E$ es recto.

Ejercicio: calcular las longitudes de DB, DC, EB, EC en función de los lados a, b, c del triángulo. Esto es una sencilla consecuencia de las relaciones anteriores: por ejemplo, si DC y DB suman a y están en relación $b : c$, la única posibilidad es que valgan uno $\frac{ab}{b+c}$ y el otro $\frac{ac}{b+c}\ldots$



Problema 4.8 *Demostrar que el baricentro divide a cada mediana en 3, es decir, un trozo es el doble que el otro.*

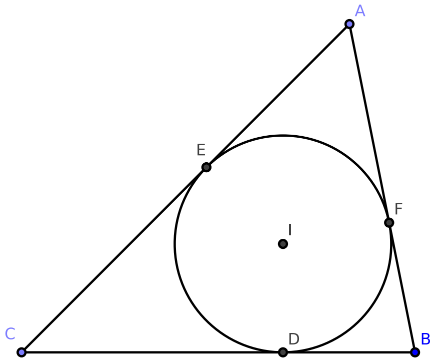
Problema 4.9 (Recta de Euler) *Demostrar que el baricentro G, el circuncentro O y el ortocentro H están alineados. Determinar en qué posición del segmento OH cae G. Pista: razonar con una homotecia de centro G que transforma alturas en mediatrices.*



Aritmética de distancias y condiciones de tangencia

Problema 4.10 *Sean D, E, F los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con los lados de un triángulo. Calcular en función de los lados a, b, c las distancias*

$$\begin{cases} x = AE = AF \\ y = BF = BD \\ z = CD = CE \end{cases}$$



Ayuda: resolver el sistema de ecuaciones $\{x+y=c, x+z=b, y+z=a\}$.

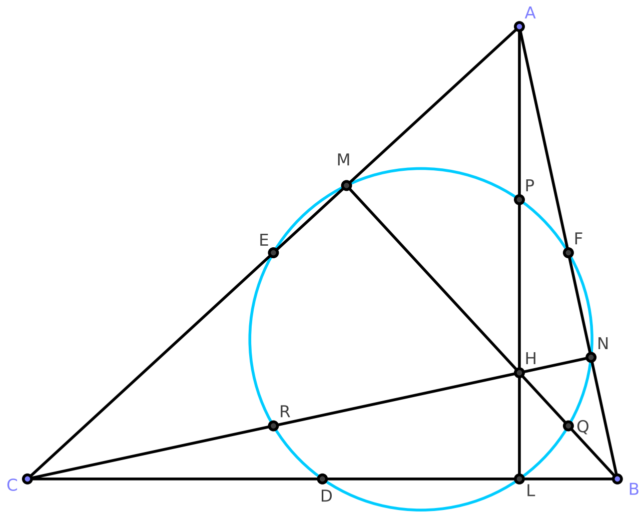
Circunferencia de los 9 puntos

También conocida como circunferencia de Feuerbach. Sea ABC un triángulo cualquiera. Existe una circunferencia que pasa por los siguientes nueve puntos:

D, E, F: puntos medios de los lados

L, M, N: pies de las alturas

P, Q, R: puntos medios de los segmentos vértice - ortocentro



Algunas propiedades favoritas

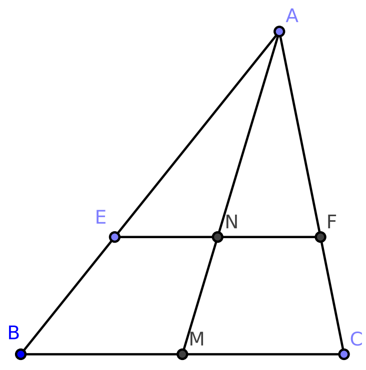
Problema 4.11 (Diagonales del paralelogramo) *En un paralelogramo, las diagonales se cortan en sus puntos medios. Puede parecer una trivialidad pero en problemas es muy útil tanto esta propiedad como su recíproca: si un punto es el medio común de dos segmentos AC y BD, los extremos $ABCD$ forman un paralelogramo.*

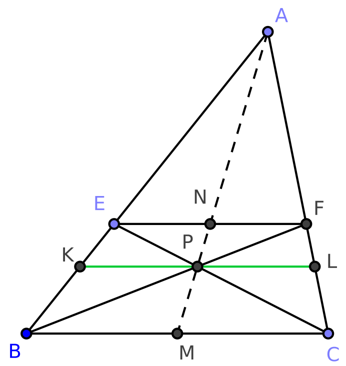
Problema 4.12 (Circuncentro del triángulo rectángulo) *El circuncentro de un triángulo rectángulo es el punto medio de la hipotenusa. Por ejemplo, el punto medio de un lado de un triángulo es el centro de la circunferencia que pasa por esos dos vértices y por los pies de las* *alturas de esos vértices. Muy útil en los dos sentidos, para encontrar un centro, y para detectar un ángulo recto si se tiene esta situación: $MA = MB = MC$, con M interior al segmento BC, entonces $\widehat{BAC}$ es recto.*

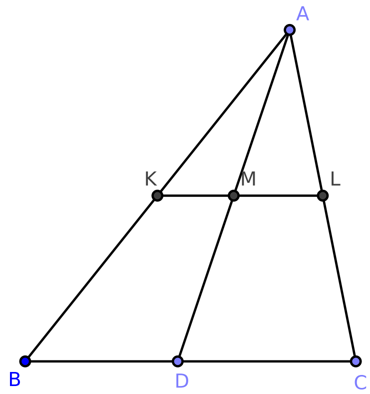
Problema 4.13 (Medianas, trapecios y Thales a saco) -
(i) En el triángulo ABC de la Figura 1, demostrar que la mediana AM divide a la mitad a cualquier segmento EF paralelo a BC. Este truco también vale para detectar cuándo un punto está en una mediana: se traza por el punto la paralela a la base y se ve si ese segmento queda dividido a la mitad.

(ii) En el trapecio $BCFE$ de la Figura 2, demostrar que AP corta a las bases BC y EF en sus puntos medios. Este truco también vale para demostrar que un cuadrilátero es un trapecio. Partiendo de un punto P arbitrario en la mediana AM y construyendo E, F, resulta ser $EF||BC$.

(iii) En el triángulo ABC de la Figura 3, la paralela media KL divide a la mitad a cualquier segmento AD, donde D es un punto arbitrario del lado BC.







Solución: todas las propiedades son aplicaciones sencillas del teorema de Thales. En algunos casos puede ser conveniente dibujar puntos auxiliares, trazar una paralela adecuada, etc. Por ejemplo, para demostrar (ii), se construyen los puntos K, L donde la paralela por P a BC corta a los lados AB, AC respectivamente. Aplicando Thales a diestra y siniestra se tiene que $\frac{KP}{EF} = \frac{BK}{BE} = \frac{CL}{CF} = \frac{PL}{EF}$. Esto prueba que $KP = PL$, luego aplicando (i) vemos que P está en la mediana AM, que también pasa por el punto medio de EF.

Problema 4.14 (Bisectriz, mediatriz y circuncírculo) - *Demostrar que en todo triángulo no isósceles, la bisectriz de un ángulo se corta con la mediatriz del lado opuesto en un punto de la circunferencia circunscrita. (Si el triángulo es isósceles, la bisectriz y la mediatriz en cuestión son la misma recta).*

Esta sencilla propiedad me ha resultado extremadamente útil al resolver problemas, ya que la propiedad se puede aplicar de muchas maneras. Tenemos 3 elementos (dos rectas y una curva) que concurren en un punto, si un punto está en 2 de los 3 elementos, necesariamente es el punto de intersección triple, luego por ahí pasa el tercer elemento.

Problema 4.15 (Incentro) *Sea I el incentro del triángulo ABC. La bisectriz AI corta al lado BC en D y a la circunferencia circunscrita en un segundo punto M además de A. Demostrar que M es el centro de la circunferencia que pasa por C, B, I. Posible utilidad de este resultado: si encontramos un punto I en la bisectriz de A que además verifica $MI = MB$ (o $MI = MC$), entonces I es necesariamente el incentro.*

Problema 4.16 (Trapecio isósceles inscriptible) - *Todo trapecio isósceles es inscriptible en una circunferencia, y recíprocamente, si un trapecio es inscriptible en una circunferencia, necesariamente es un trapecio isósceles.*

Problema 4.17 (Distancia vértice - ortocentro) *Demostrar que la distancia del ortocentro a un vértice es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto.*

Problema 4.18 (Simétricos del ortocentro) *Demostrar que el simétrico del ortocentro respecto a un lado pertenece a la circunferencia circunscrita. Demostrar que el simétrico del ortocentro respecto al punto medio de un lado también pertenece a la circunferencia circunscrita.*

5. Combinatoria

Principio del palomar o de Dirichlet

Si hay más palomas que nidos, en algún nido debe haber más de una paloma.

Si hay n nidos y m palomas, con $m > kn$, entonces en algún nido habrá más de k palomas.

Ejemplo: demostrar que en un conjunto de 10 números entre 0 y 100, siempre habrá dos subconjuntos disjuntos que tengan la misma suma. Demostración: el número de posibles subconjuntos de un conjunto de 10 elementos es $2^{10} = 1024$. Hay 1024 posibles sumas, pero no pueden ser todas distintas porque el máximo valor posible para una suma es $10 \cdot 100 = 1000$. Existen conjuntos distintos con la misma suma. Eliminando elementos repetidos, obtenemos dos conjuntos disjuntos con igual suma.

Problema 5.1 *En un conjunto de 6 personas cada par de personas son amigos o enemigos entre sí. Demostrar que existe un subconjunto de 3 personas tales que todos son amigos o todos son enemigos.*

Problema 5.2 *En una reunión hay 201 personas de 5 nacionalidades diferentes. Se sabe que, en cada grupo de 6, al menos dos tienen la misma edad. Demostrar que hay al menos 5 personas del mismo país, de la misma edad y del mismo sexo.*

Problema 5.3 *Con 21 fichas de damas, algunas blancas y otras negras, se forma un rectángulo de* 3×7. *Demostrar que siempre hay cuatro fichas del mismo color situadas en los vértices de un rectángulo.*

El principio del palomar tiene innumerables formas de esconderse, y permite demostrar propiedades nada triviales de números.

Problema 5.4 *Sea* A *un conjunto de* $n+1$ *enteros elegidos entre* $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ *(puede haber repeticiones). Demostrar que algún miembro de* A *divide a otro miembro.*

Para poder aplicar el principio del palomar, debemos particionar el conjunto A ($n+1$ palomas) en n clases (nidos), de manera que en dos elementos de la misma clase siempre uno divida a otro. Dado que tenemos $n+1$ elementos para repartir entre n clases, A deberá contener al menos dos elementos de una misma clase, lo cual resolverá el problema. Ahora bien, ¿cómo se consigue esta partición?

$$\begin{aligned}
\text{clase 1} &: \ 1, 2, 4, \ldots \\
\text{clase 2} &: \ 3, 6, 12, \ldots \\
\text{clase 3} &: \ 5, 10, 20, \ldots \\
\ldots & \\
\text{clase n} &: \ 2n-1.
\end{aligned}$$

cada clase empieza en un número impar y vamos multiplicando por 2 sin pasarnos del límite $2n$. Estas n clases cubren todos los números $1, 2, \ldots, 2n$, y cada número está en una única clase: si el número es potencia de 2 estará en la clase 1, y si es de la forma $2^k.i$, con i impar, estará en la clase que empieza por i.

Problema 5.5 *Para $x \in \mathbb{R}$ y n entero positivo, existe un número racional $\frac{p}{q}$, con $1 \leq q \leq n$, que dista de x menos de $\frac{1}{n}$, es decir*

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{n}.$$

Pista: elegir $q = n$ y hacer variar p.

Problema 5.6 (Aproximación de Dirichlet) *Para $x \in \mathbb{R}$ y n entero positivo, existe un número racional $\frac{p}{q}$, con $1 \leq q \leq n$, que dista de x menos de $\frac{1}{n}$, es decir*

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{nq}.$$

Es bastante más difícil que el problema anterior. Consideramos los $n+1$ números $\{ax\}$, donde $\{*\}$ denota la parte fraccionaria del número $*$, y $a = 0, 1, \ldots, n$. Esos $n+1$ números (palomas) se reparten en n nidos:

$$\left[0, \frac{1}{n}\right), \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right), \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right).$$

Por el palomar, podemos encontrar dos números distintos $\{ax\}, \{a'x\}$ en el mismo nido. Podemos suponer sin pérdida de generalidad $a < a'$. La pertenencia al mismo nido quiere decir que al sumar o restar un número entero adecuado, la diferencia entre ax y $a'x$ será menor que $\frac{1}{n}$. Concretamente, existe un entero p tal que

$$0 < |a'x - ax - p| < \frac{1}{n}$$

Llamamos $q = a' - a$, dividimos entre q y listo.

Combinaciones y permutaciones

Nada de variaciones ni quebraderos de cabeza ... que si son con o sin repetición. El exceso de fórmulas y notación puede ser contraproducente. Recomiendo sólo saber la fórmula de combinaciones, y en general, saber plantear los problemas y saber contar, saber cuándo se multiplican las posibilidades, etc.

Permutaciones de n elementos: $n!$. Combinaciones de n en k: formas de elegir k elementos en un conjunto de n: se escribe $\binom{n}{k}$ o $C(n,k)$ y su valor es $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Estos números combinatorios tienen la propiedad $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ y aparecen en el triángulo de Pascal o Tartaglia, en el cual la suma de dos elementos consecutivos es igual al elemento situado justo debajo de esos dos:

```
            1
         1     1
      1     2     1
   1     3     3     1
1     4     6     4     1
.......................
```

Problema 5.7 *El número de soluciones enteras no negativas de la ecuación*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$$

es $C(n+k-1,k)$.

Supongamos por ejemplo $n = 4, k = 10$, es decir, buscamos las soluciones enteras no negativas de la ecuación $a + b + c + d = 10$. Cada solución queda determinada de forma única como una lista con 10 unos y 3 separadores, por ejemplo la solución $a = 4, b = 1, c = 2, d = 3$ quedaría codificada 1111|1|11|111. Dos soluciones son iguales si tienen los separadores colocados exactamente en las mismas posiciones. Las formas de colocar los separadores son $C(10 + 3, 3)$.

En el caso n, k general, hay que colocar k unos y $n-1$ separadores, lo cual se puede realizar de $\frac{(n+k-1)}{k!(n-1)!}$ maneras distintas.

Muchos números combinatorios se obtienen como el coeficiente de un polinomio en varias variables.

Problema 5.8 *¿Cuál es el coeficiente de a^3b^2c en el desarrollo de*

$$(a + b + c)^6 = (a + b + c)(a + b + c)(a + b + c)(a + b + c)(a + b + c)(a + b + c)?$$

Problema 5.9 *Si se desarrolla en potencias de x la expresión*

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d)(x + e)$$

¿cuál es el coeficiente de x^3 y cuántos sumandos contiene?

La técnica de contar por filas y por columnas

Problema 5.10 *Hallar el número de diagonales de un polígono regular de n lados.*

Por diagonales se entiende cualquier segmento que conecta vértices no adyacentes. Por lo tanto, cada punto pertenece a $n - 3$ diagonales. Si hacemos el producto $n(n - 3)$, estamos contando dos veces cada diagonal, por lo cual el número verdadero de diagonales es $\frac{n(n-3)}{2}$.

Podemos imaginar que hacemos el recuento en una tabla, cada fila corresponde a un punto, y cada columna corresponde a una diagonal. Se marca una $\times$ cada vez que un punto pertenece a una diagonal. Denotamos por d al número de diagonales. Si hacemos el recuento por filas, la cantidad de símbolos $\times$ es $n(n - 3)$, porque cada punto pertenece a $n - 3$ diagonales. Si hacemos el recuento por columnas, salen $2d$ cruces, ya que cada diagonal contiene dos puntos. La igualdad $n(n - 3) = 2d$ permite despejar d.

Problema 5.11 (Ejemplo resuelto) -

Los personajes Yogurtu y Oblongo (Les Luthiers, "Cartas de color", 1979) mantienen la siguiente correspondencia.

Querido tío Oblongo:

Me propusieron un problema sorprendente que trataré de explicarte: se trata de un conjunto con 21 puntos, donde cada recta tiene 5 puntos, por cada par de puntos pasa una única recta, y por cada punto pasa el mismo número de rectas, un número m desconocido.

Me piden hallar r = el número de rectas distintas, m = el número de rectas que pasan por un punto, y demostrar que toda pareja de rectas se cortan en un punto. Es fantástico, no hay paralelas! ¿Podrías ayudarme, por favor?

Muchos saludos,

Yogurtu

Querido sobrino Yogurtu Nge:

Estoy muy impresionado por lo que me cuentas sobre ... ese mundo fantástico sin paralelas. En mi vida había oído hablar de nada que se pareciera tanto al plano proyectivo sobre el cuerpo de 4 elementos. Aunque no conozcas la Geometría proyectiva sobre cuerpos finitos, puedes resolver este problema mediante combinatoria elemental. El viejo truco de hacer una tabla, marcar cruces e igualar la suma por filas y la suma por columnas, puede serte de utilidad.

Tuyo,

Tu tío Oblongo.

El número de parejas de puntos es $\binom{21}{2} = \frac{21\cdot 20}{2} = 210$. El número de rectas es r, desconocido.

Formamos una tabla con 210 filas y r columnas, y para cada par de puntos marcamos una x en la columna correspondiente a la única recta que los contiene. Sumando por filas hay 210 cruces. Sumando por columnas, como cada recta tiene 5 puntos, habrá $\binom{5}{2} = 10$ cruces en cada columna. Igualando $210 = 10r$ despejamos $r = 21$.

Sabiendo ahora que hay 21 rectas, formamos otra tabla con una fila para cada punto, y una columna para cada recta, y marcamos una x cada vez que un punto pertenece a una recta. Sumando por columnas tenemos $21 \cdot 5 = 105$ porque cada recta tiene 5 puntos. Sumando por filas tenemos $21 \cdot m$. Igualando, obtenemos $m = 5$. Luego por cada punto pasan 5 rectas.

Finalmente formamos una tercera tabla con 21 filas, una para cada punto, y 210 columnas, una para cada pareja de rectas. Si un par de rectas se cortan en un punto, marcamos una x. Sumando por columnas, en cada columna hay una $\times$ o ninguna, luego la suma total de $\times$ es ≤ 210. Sumando por filas, como sabemos que por cada punto pasan 5 rectas, sabemos que ese punto está en exactamente $\binom{5}{2} = 10$ intersecciones de parejas de rectas, luego hay 10 x en cada fila, y 210 en total. Para que las sumas coincidan, la única posibilidad es que cada par de rectas se corten.

En el siguiente problema se aplica nuevamente la técnica de contar algo de dos maneras distintas e igualar los resultados.

Problema 5.12 *Demostrar que es imposible colorear un tablero cuadriculado* 2011×2011 *con los colores rojo y azul, de manera que cada casilla roja tenga exactamente 3 vecinas azules, y cada azul tenga exactamente una vecina roja. Nota: por casillas vecinas se entiende las que tienen un lado común.*

Es un ejercicio de combinatoria de verdad, no simplemente calcular permutaciones o combinaciones, sino saber contar bien.

Las posiciones de un tablero $n \times n$ pueden clasificarse en 3 tipos: vértices, que tienen dos vecinos, exteriores no-vértice, con 3 vecinas cada una, y finalmente interiores, con 4 vecinas cada una. Denotamos por R_e, R_i al número de rojas exteriores e interiores respectivamente, y de forma similar A_e, A_i son los números de azules exteriores e interiores. Dado que los 4 vértices deben ser azules, el número total de azules será $A = 4 + A_e + A_i$ y el número de rojos $R = R_e + R_i$, con la restricción evidente $R + A = n^2$.

Ahora contamos la cantidad de casillas negras de dos maneras distintas e igualamos los recuentos.

(i) Recorriendo 1 a 1 las posiciones del tablero, vamos contando las vecinas.

	vértice	borde no vértice	interior
por cada azul	1 roja, 1 azul. Aportan 4 azules	2 azules, 1 roja. Aportan $2A_e$ azules	3 azules, 1 roja. Aportan $3A_i$ azules
por cada roja	–	3 azules, 0 rojas. Aportan $3R_e$ azules	3 azules, 1 roja. Aportan $3R_i$ azules

El número total de azules es entonces

$$4 + 2A_e + 3A_i + 3R_e + 3R_i$$

(ii) Ahora miramos cuántas veces fue contada cada casilla azul en el proceso anterior: las 4 de los vértices fueron contadas dos veces, una por cada vecina, las A_e exteriores fueron contadas 3 veces, y las A_i interiores 4 veces cada una. Esto da un recuento de azules igual a

$$2 \cdot 4 + 3A_e + 4A_i$$

Igualando las dos cantidades se obtiene $3(R_e+R_i) = 4+A_e+A_i$, es decir $3R = A$. En particular el número total de casillas debe ser múltiplo de 4, por lo tanto la tarea planteada es imposible para un cuadrado de lado 2011.

Problema 5.13 *En un conjunto de n personas algunas se saludan mutuamente. Demostrar que la cantidad de personas que saludan a un número impar de personas es un número par.*

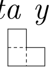
Problema 5.14 *Dados 7 puntos dentro de un hexágono de lado 1, demostrar que existen dos puntos separados por una distancia menor o igual que 1.*

Problema 5.15 *Un grupo de 5 amigos deciden guardar un documento en una caja fuerte, de forma que se aseguren de que nunca un subconjunto de menos de 3 personas puedan abrir la caja fuerte, y cualquier subconjunto de 3 o más personas siempre puedan abrirla. Para ello, deciden que la caja tendrá m llaves distintas, se hacen algunas copias de esas llaves y se le entrega a cada persona una combinación de n llaves distintas. Determinar cuál es el mínimo valor posible de m. Para ese valor de m, ¿cuántas llaves (n) se le entrega a cada persona?*

Problema 5.16 *En una olimpíada matemática ningún alumno ha resuelto todos los problemas; pero todos los problemas han sido resueltos por algún alumno. Demostrar que existen dos alumnos A, B y dos problemas P, Q tales que A ha resuelto P pero no Q, y además B ha resuelto Q pero no P.*

Pista: considerar $k =$ el máximo número de problemas resueltos por algún alumno, y razonar con un alumno A que haya resuelto k problemas.

Problema 5.17 *¿De cuántas maneras distintas se puede subir una escalera de 10 escalones, si en cada paso podemos elegir entre avanzar 1 o 2 escalones?*

Problema 5.18 *¿Es posible rellenar de forma exacta y sin solapamientos un tablero cuadriculado de tamaño 5×5 utilizando piezas de la forma*  *(en todas sus posibles orientaciones), de forma que quede sin cubrir únicamente el cuadradito central? ¿Es posible realizar la misma tarea en un cuadriculado $5^{2011} \times 5^{2011}$?*

Problema 5.19 *Sea x un número irracional, y para todo entero positivo n se considera el número $x_n = \{xn\}$, la parte fraccionaria de nx. Demostrar que la sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ es "densa" en el intervalo $[0, 1)$, en el siguiente sentido: Para todo número real r entre 0 y 1, existen elementos de la sucesión x_n tan cerca de r como se quiera, es decir, para todo $\epsilon > 0$, existe un x_n tal que $|r - x_n| < \epsilon$. De forma equivalente, para cualesquiera a, b tales que $0 < a < b < 1$, hay que demostrar que existe un elemento x_n comprendido entre a y b.*

Problema 5.20 *Demostrar que toda sucesión de n^2 números distintos contiene una subsucesión de longitud n que es monótona (siempre creciente o siempre decreciente). [Nota posterior: uy, con esto 'me he pasao', es un teorema de Erdös - Szekeres bastante dificilillo]*

Problema 5.21 *Un tablero 100×100 ha sido rellenado con los números $\{1, \ldots, 100\}$, de manera que cada número aparece exactamente 100 veces. Demostrar que existe alguna fila o columna que tiene al menos 10 números distintos.*

Problema 5.22 *Los números de Fibonacci están definidos por la famosa sucesión $F_1 = 1, F_2 = 1$, y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo $n \geq 3$. Si p es un número primo, demostrar que al menos uno de los primeros $p + 1$ números de Fibonacci debe ser divisible por p.*

6. Ecuaciones funcionales

En este apartado se dan algunas indicaciones para resolver ecuaciones funcionales de estilo olímpico.

Problema 6.1 *Determinar todas las funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que satisfacen*

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \geq 3f(x+2y+3z)$$

para todo x, y, z.

Respuesta: todas las funciones constantes.

Solución: sustituyendo $x = a, y = z = 0$ tenemos $2f(a) + f(0) \geq 3f(a)$, luego $f(0) \geq f(a)$. Por otra parte, si se sustituye $x = a/2, y = a/2, z = -a/2$ se tiene $f(a) + f(0) + f(0) \geq 3f(0)$, con lo cual $f(a) \geq f(0)$. Entonces necesariamente $f(a) = f(0)$ para todo a, es decir f es constante. Y recíprocamente, cualquier función constante $f(x) = k$ verifica las condiciones del enunciado, dado que $k + k + k \geq 3k$.

Problema 6.2 *Sea* f *una función real que verifica*

(a) Para todos los x, y *reales,* $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

(b) Existe un número real x_o *tal que* $f(x_o) = -1$.

Demostrar que f *es periódica.*

Solución: Primero vemos que f es simétrica respecto al eje x: intercambiando x, y en la condición (a) se ve que $f(-algo) = f(algo)$. Suponiendo $x = y = 0$ vemos que $f(0) = 0$ o $f(0) = 1$. Si fuera $f(0) = 0$, sustituyendo $y = 0$ se tendría $2f(x) = 2f(x)f(0) = 0$ para todo x, con lo cual f sería idénticamente nula, en contra de la condición (b). Por lo tanto, debe ser $f(0) = 1$. Ahora sustituimos $x = y = x_o$ y tenemos que $f(x_o) + 1 = 2f(x_o/2)^2$, lo que implica que $f(x_o/2) = 0$. A continuación se sustituye $y = x_o/2 \Rightarrow f(x + x_o/2) = -f(x - x_o/2) \ldots$ Con razonamientos de este estilo se comprueba que f es periódica de período $2x_o$.

Problema 6.3 *Sea* f *una función real que satisface*

(a) $f(0) = 1/2$.

(b) Existe un real a *se tiene que* $f(x+y) = f(x)f(a-y) + f(y)f(a-x)$*, para todo* x, y.

Demostrar que f *es constante.*

Solución: sustituyendo $x = y = 0$ se deduce que $f(a) = 1/2$. Para $y = 0$ se obtiene $f(x) = f(a-x)$. Si $y = a-x$ tenemos $f(a) = f(x)^2 + f(a-x)^2$, luego $f(x) = 1/2$ o $-1/2$. Ahora sea x arbitrario. Tenemos que $f(x/2)$ y $f(a-x/2)$ valen igual, puede ser $1/2$ o $-1/2$. Pero entonces $f(x) = f(x/2 + x/2) = 2f(x)f(a-x/2) = 1/2$.

Aperturas y finales

Por ahora hemos visto buenos trucos de "apertura": sustituir varias combinaciones adecuadas de valores en la ecuación funcional. Para rematar y resolver los finales, hacen falta más trucos. Los más utilizados son intentar demostrar si la función cumple alguna de las condiciones $f(x+y) = f(x) + f(y)$, o $f(xy) = f(x)f(y)$, o estudiar la composición $f(f(x))$ para deducir si f es biyectiva. También puede ser útil saber si f es monótona, es decir, si $f(x)$ es siempre $\geq$ o siempre $\leq f(y)$ cuando $x \leq y$.

Los siguientes trozos de razonamientos estándar pueden perfectamente formar parte de la solución de un problema de funciones.

Problema 6.4 (Funciones *f(x+y)=f(x)+f(y)*) -

Si $a = f(1)$, estas funciones cumplen $f(n) = an$ y $f(-n) = -f(n)$ para todo n entero.

Si además f está definida sobre los racionales, se tiene $f\left(\frac{p}{q}\right) = a \cdot \frac{p}{q}$ para todo racional $\frac{p}{q}$.

Si además f está definida sobre los reales y es monótona (siempre creciente o siempre decreciente), entonces $f(x) = ax$ para todo x real. Esto último también se cumple si se sustituye la palabra monótona por "continua", pero no se asume que los estudiantes de este nivel conozcan el cálculo diferencial.

Sustituyendo $x = y = 0$ tenemos $f(0+0) = f(0) + f(0)$, luego $\boxed{f(0) = 0}$. Sabiendo lo cual, si hacemos $y = -x$ obtenemos

$$0 = f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x) \Rightarrow \boxed{f(-x) = -f(x) \text{ para todo } x.}$$

Aplicando repetidas veces la condición $f(x+y) = f(x) + f(y)$ obtenemos $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1)$, $f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 3f(1)$,..., y se deduce que

$$\boxed{f(n) = nf(1) = an \text{ para todo entero positivo } n}$$

y como $f(-n) = -f(n)$, lo anterior vale para cualquier entero n.

Si la función f está definida solamente sobre los enteros y $f(x+y) = f(x)+f(y)$, lo anterior prueba que f queda determinada de forma única por el valor $a = f(1)$. Supongamos ahora que la función está definida sobre los racionales. Para todo racional x se tiene entonces $f(x+x) = f(x) + f(x)$, ..., y en general, $f(nx) = nf(x)$ para todo entero positivo n. Sustituyendo ahora $x = \frac{1}{n}$ obtenemos $f(1) = nf(\frac{1}{n})$, es decir $\boxed{f(\frac{1}{n}) = \frac{f(1)}{n} = \frac{a}{n}}$. Combinando lo anterior para $x = \frac{m}{n}$, se deduce que $\boxed{f(\frac{m}{n}) = \frac{f(m)}{n} = a \cdot \frac{m}{n}}$, lo que queríamos.

Si la función f está definida solamente sobre $\mathbb{Q}$, el estudio queda concluido. Si está definida sobre $\mathbb{R}$, hay que seguirla peleando, y ver si se verifica algún argumento de continuidad o monotonía que permita extender la propiedad $f(x) = ax$ sobre los racionales a la misma propiedad sobre los reales.

Si fuera $a = 0$, f sería la función idénticamente nula, ya que para todo racional p/q sería $f(p/q) = ap/q = 0$, y para todo número real x se procedería así: colocar x entre dos racionales r_1 y r_2, por la monotonía de f se tendrá que $f(x)$ está en el intervalo entre $f(r_1)$ y $f(r_2)$, luego $f(x) = 0$ para todo x en $\mathbb{R}$.

Supongamos que $a < 0$, que f es monótona decreciente ($f(x) \geq f(y)$ si $x \leq y$) y que existe r real tal que $f(r) < ar$ (el caso $f(r) > ar$ es totalmente análogo, y el razonamiento es igual si $a > 0$ y f es creciente, y el caso $a = 0$ ya fue estudiado). La clave es que siempre existe un número racional entre dos reales distintos. En este caso, si $f(r) < ar$, al dividir por $a < 0$ cambia el sentido de la desigualdad: $\frac{f(r)}{a} > r$.

$$\begin{aligned} \text{Metemos un racional } p/q \text{ entre } f(r)/a \text{ y } r \quad &: \quad \frac{f(r)}{a} > \frac{p}{q} > r \\ \text{Multiplicamos por } a \quad &: \quad f(r) < \underbrace{a \cdot \frac{p}{q}}_{f(\frac{p}{q})} < ar \end{aligned}$$

Es decir, hemos encontrado $p/q < r$ con $f(p/q) < f(r)$, absurdo porque contradice la monotonía decreciente de f. Se concluye que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 6.5 (Funciones *f(xy)=f(x)f(y)*) -

Esta propiedad por sí sola no da demasiado juego, pero su utilidad se ve aumentada si se descubren más propiedades.

Si f está definida sobre los naturales, su cálculo se reduce al caso $f(p)$, donde p es primo. Para cualquier otro entero positivo n, se factoriza $n = p_1^{r_1} \cdots p_t^{r_t}$ y se tiene

$$f(n) = f\left(p_1^{r_1} \cdots p_t^{r_t}\right) = f(p_1)^{r_1} \cdots f(p_t)^{r_t}$$

Si f está definida sobre los enteros, habrá que estudiar el valor $f(-1)$.

Sustituyendo $x = y = 1$ se ve que $f(1) = f(1)^2$, luego $f(1)$ es igual a 1 o a 0. Si $f(1) = 0$, para todo x se tiene

$$f(x) = f(x \cdot 1) = f(x)f(1) = f(x) \cdot 0 = 0,$$

luego f es la función nula, y habría que ver si es admisible en el problema en cuestión.

Si $f(1) = 1$, continuamos. ¿Qué pasa con $f(0)$? Sustituyendo $x = y = 0$ tenemos $f(0) = f(0)^2$, luego también $f(0)$ vale cero o uno. Si $f(0) = 1$, se tiene

$$1 = f(0) = f(0 \cdot x) = f(0)f(x) = 1 \cdot f(x) = f(x) \quad \text{para todo } x,$$

luego f es constante e igual a 1.

Continuamos en el caso $f(0) = 1$, y deducimos que

$$f(x^2) = f(x)^2, \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}, \ldots$$

y poco más, si no se combina con otras propiedades.

En el estudio de ecuaciones funcionales suele ser útil hacer aparecer la expresión $f(f(x))$, es decir la composición de f consigo misma.

Problema 6.6 (Si *f(f(x))* es biyectiva, *f* también) - *Sea $f(f(x))$ una función biyectiva, por ejemplo $f(f(x)) = \frac{2x+1}{3}$. Entonces, f también es biyectiva.*

En efecto, dado un valor $a \in \mathbb{R}$ arbitrario, existe x tal que $\frac{2x+1}{3} = a$ (x no es más que $\frac{3a-1}{2}$). Entonces $f(f(x)) = a$, es decir, hemos encontrado un elemento $y = f(x)$ que verifica que $f(y) = a$, luego f es sobreyectiva porque su imagen alcanza cualquier valor a.

Para ver que f es inyectiva, supongamos que $f(x) = f(y)$. Aplicando nuevamente f tenemos la igualdad $f(f(x)) = f(f(y))$, que se traduce en $\frac{2x+1}{3} = \frac{2y+1}{3}$, de donde se deduce inmediatamente que $x = y$. El mismo razonamiento vale para cualquier expresión de $f(f(x))$ que sea biyectiva.

Problema 6.7 (El truco de resolver un sistema) -

Hallar todas las funciones $f(x)$ definidas sobre los números reales verificando

$$3f(2-x) + 2f(x) = x^2$$

Reemplazando x por $2 - x$ tenemos una nueva ecuación

$$3f(x) + 2f(2-x) = (2-x)^2.$$

En la primera ecuación podemos despejar $f(2-x) = \frac{x^2 - 2f(x)}{3}$ y sustituirlo en la segunda, obteniendo una única ecuación en la incógnita $f(x)$... La solución es

$$f(x) = \frac{x^2 - 12x + 12}{5}$$

En problemas similares puede no ser suficiente hacer una única sustitución, podría ser necesario realizar más sustituciones.

Otra familia de ecuaciones funcionales que aparece bastante son las funciones enteras definidas por recurrencia, donde $f(n)$ depende del resto de dividir n entre cierta base b. Muchas de estas funciones están relacionadas con la expresión de n en base b.

Problema 6.8 (Funciones enteras recurrentes) - *Sea* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definida por*

$$f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2, f(3n + r) = -f(n) + r$$

Hallar cuántos enteros entre 0 y 2012 verifican $f(n) = 0$.

La función f lo que hace es lo siguiente: dado un número n, se escribe en base 3, se suman las cifras que ocupan posición impar (empezando desde la derecha) y se restan las cifras que ocupan posiciones pares [revisar: no sé si no me he liado con par - impar]. Hay que demostrar esto. Lo haremos por inducción sobre k, el número de cifras de n en base 3. Si $k = 1$ la conjetura se cumple, $f(r) = r$ para $r = 0, 1, 2$. Supongamos que la conjetura es válida para todo número de $\leq k$ cifras en base 3. Sea n un número de $k + 1$ cifras en base 3, es decir $n = 3m + r$, donde m tiene k cifras. Por definición de f, se tiene $f(n) = f(3m + r) = -f(m) + r$. Si m se escribe con cifras $m_k, \ldots, m_1, m_0$, por hipótesis de inducción podemos asumir que

$$f(m) = m_0 - m_1 + m_2 - m_3 \pm \cdots,$$

lo cual sustituido en $f(n) = -f(m) + r$ nos da

$$f(n) = r - m_0 + m_1 - m_2 + m_3 \pm \cdots,$$

es decir, también para números de $k + 1$ cifras se verifica la conjetura de que $f(n)$ es la suma alternada de dígitos en base 3, ya que la expresión de n es $m_k, \ldots, m_1, m_0, r$.

El problema queda reducido a una cuestión combinatoria: encontrar todos los n entre 0 y 2012 tales que su suma alternada en base 3 es 0. Dado que $3^7 = 2187 > 2012$, será suficiente estudiar números de hasta 7 cifras. Ver sección de Combinatoria. En realidad, este problema lo acabo de inventar adaptando la función del Problema 2 de la OME 2010, ignoro si tiene una solución sencilla o no.

Problemas de ecuaciones funcionales

Problema 6.9 (OME 1998-5) -

Hallar todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *estrictamente crecientes tales que* $f(n+f(n)) = 2f(n)$ *para* $n = 1, 2, 3 \ldots$

Problema 6.10 (OME 2000-6) *Demostrar que no existe ninguna función* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *que cumpla* $f(f(n)) = n + 1$.

Problema 6.11 (OME 2001-6) *Determinar la función* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *(siendo* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *el conjunto de los números naturales) que cumple, para cualesquiera* $s, n \in \mathbb{N}$*, las siguientes condiciones:*

$f(1) = f(2^s) = 1$ *y si* $n < 2^s$*, entonces* $f(2^s + n) = f(n) + 1$.

1. Calcular el valor máximo de $f(n)$ *cuando* $n \leq 2001$.

2. Hallar el menor número natural n *tal que* $f(n) = 2001$.

Problema 6.12 *Resolver las siguientes ecuaciones funcionales:*

$$\begin{array}{lll} (i) & 2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 & x \neq 0 \\ (ii) & \frac{1}{2}f(x) + f\left(\frac{x}{3x-1}\right) = x & x \neq \frac{1}{3} \\ (iii) & f\left(\frac{x-1}{1+3x}\right) + f\left(\frac{1+x}{1-3x}\right) = \frac{1+x}{1-3x} & x \neq \frac{1}{3}, \frac{-1}{3} \\ (iv) & f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x & x \neq 0 \end{array}$$

Problema 6.13 (OME 2002-3) *La función g se define sobre los números naturales y satisface las condiciones: $g(2) = 1$, $f(2n) = g(n)$, $g(2n+1) = g(2n) + 1$. Sea n un número natural tal que $1 \leq n \leq 2002$. Calcular el valor máximo M de $g(n)$. Calcular cuántos valores de n satisfacen $g(n) = M$.*

Problema 6.14 (OME 2004-3) *Se representa por $\mathbb{Z}$ el conjunto de todos los enteros. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que para cualesquiera x, y enteros se verifica*

$$f(x + f(y)) = f(x) - y$$

Problema 6.15 (OME 2006-4) *Hallar todas las funciones $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación*

$$f(x)f(y) + f\left(\frac{\lambda}{x}\right) f\left(\frac{\lambda}{y}\right) = 2f(xy)$$

para todo par de números reales x, y positivos, siendo λ un número real positivo tal que $f(\lambda) = 1$.

Problema 6.16 *Sea f una función definida sobre el conjunto $A = \{0, 1, \ldots, 2^{2012}\}$ dada por:*

$$f(0) = 0, \quad f(2n) = f(n), \quad f(2n+1) = 2^{2011} + f(n)$$

Determinar el número de elementos de A que satisfacen $f(n) = n$.

Problema 6.17 (IMO 1996-4) *Sea S el conjunto de los enteros no negativos. Hallar todas las funciones $f : S \to S$ tales que $f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$ para todo m, n.*

Problema 6.18 (IMO 1992-2) *Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$ para todo x, y.*

Problema 6.19 *Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$ para todo x, y.*

Problema 6.20 (IMO 2002-5) *Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que para cualesquiera reales x, y, u, v se verifica*

$$(f(x) + f(y))(f(u) + f(v)) = f(xu - yv).$$