LIV Olimpiada Matemática Española

Fase Local, León

Viernes 12 de enero de 2018

Primera sesión

1. ¿Cuál es valor máximo que puede alcanzar la expresión $mcd(n^2+6, 36)$, siendo $n \geq 0$ un número entero? *Nota: mcd es el máximo común divisor.*

2. $ABCDEFG$ es un heptágono regular. AC y BF se cortan en H. AF y CG se cortan en I. Probar que $DE = HI$.

3. Se tiene un tablero cuadriculado de tamaño 4×4, y una cantidad ilimitada de fichas de dominó, cada una de tamaño tal que podría colocarse ocupando exactamente dos casillas contiguas del tablero (se consideran casillas contiguas las que tienen un lado común). Un *movimiento* (o *paso*, o *jugada*) consiste en colocar una ficha de dominó ocupando exactamente dos casillas contiguas del tablero, sin salirse fuera del mismo y sin solaparse con ninguna otra ficha previamente colocada. Inicialmente el tablero está vacío. Después de n movimientos, se observa que ya no es posible colocar ninguna ficha más mediante movimientos permitidos.

   Determinar el menor valor de n para el cual es posible esta situación.

No está permitido el uso de calculadores, móviles, dispositivos electrónicos, etc.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de esta sesión es de 2 horas y media.

LIV Olimpiada Matemática Española

Fase Local, León

Viernes 12 de enero de 2018

Segunda sesión

4. Encontrar razonadamente todas las raíces posibles del polinomio $P(Q(x))$, siendo

$$P(x) = (x-2)(x-p) \qquad \text{y} \qquad Q(x) = x^2 + 4x - 7,$$

sabiendo que al menos una de ellas tiene multiplicidad 2 (es una raíz doble).

5. En un juego, Antón elige como número inicial un entero $n \geq 0$ que no sea un cuadrado perfecto. Berta suma a ese número el entero siguiente, $n+1$. Si esta suma es un cuadrado perfecto, ha ganado ella. En caso contrario, Antón suma $n+2$ a la suma anterior. Si la nueva suma es cuadrado perfecto, ha ganado él. En caso contrario, el turno vuelve a Berta, quien suma $n+3$, y así sucesivamente.

   Probar que existen infinitos números iniciales que dan la victoria a Antón.

6. Se define la sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ para n entero positivo, de la manera siguiente:

$$a_1 = 1; \qquad a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}),\ n > 1.$$

   Determinar, razonadamente, el valor de a_{2018}.

7. Sea ABC un triángulo acutángulo y AD una de sus alturas ($D \in BC$). Las bisectrices interiores de los ángulos $B\widehat{A}D$ y $C\widehat{A}D$ cortan al lado BC en los puntos E y F, respectivamente. La circunferencia circunscrita del triángulo AEF corta a los lados AB y AC (de ABC) en G y H, respectivamente.

   Demostrar que las rectas EH, FG y AD pasan por un punto común.

No está permitido el uso de calculadores, móviles, dispositivos electrónicos, etc.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de esta sesión es de 3 horas y media.

Soluciones

1. ¿Cuál es valor máximo que puede alcanzar la expresión $mcd(n^2+6, 36)$, siendo $n \geq 0$ un número entero? *Nota: mcd es el máximo común divisor.*

   Solución.

   Iniciamos un análisis exploratorio para valores bajos de n:

   $mcd(0^2 + 6, 36) = mcd(6, 36) = 6,$

   $mcd(1^2 + 6, 36) = mcd(7, 36) = 1,$

   $mcd(2^2 + 6, 36) = mcd(10, 36) = 2,$

   $mcd(3^2 + 6, 36) = mcd(15, 36) = 3,$

   $mcd(4^2 + 6, 36) = mcd(22, 36) = 2,$

   $mcd(5^2 + 6, 36) = mcd(31, 36) = 1,$

   $mcd(6^2 + 6, 36) = mcd(42, 36) = 6,$

   $mcd(7^2 + 6, 36) = mcd(55, 36) = 1,$

   $mcd(8^2 + 6, 36) = mcd(70, 36) = 2,$

   $mcd(9^2 + 6, 36) = mcd(87, 36) = 3, \ldots$

   No parece que se alcance nunca un valor mayor que 6. Probaremos que efectivamente el máximo buscado es 6.

   Los divisores de 36 son 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Entre ellos, los que son mayores que 6 son 9, 12, 18 y 36, todos son múltiplos de 4 o de 9. Probaremos que $n^2 + 6$ nunca es múltiplo de 4 ni de 9, y eso será suficiente para confirmar que el mcd entre $n^2 + 6$ y 36 nunca puede ser mayor que 6.

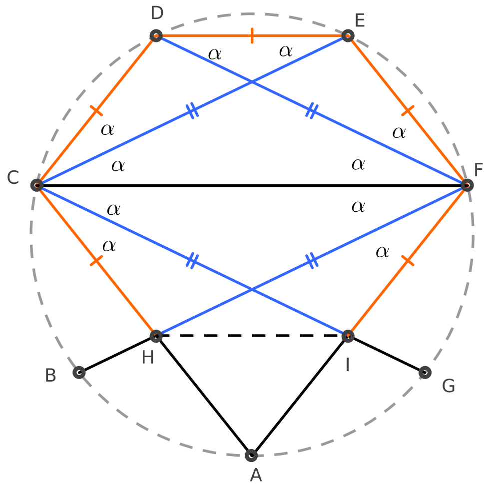
   Si $n^2 + 6$ fuera múltiplo de 4, en particular es par, luego n^2 debe ser par, es decir, n es par. Pero entonces n^2 es múltiplo de 4, y como 6 no es múltiplo de 4, la suma $n^2 + 6$ no es múltiplo de 4.

   Si $n^2 + 6$ fuera múltiplo de 9, en particular es múltiplo de 3, luego n^2 debe ser múltiplo de 3, y n también. Pero entonces n^2 es múltiplo de 9, por lo que $n^2 + 6$ no puede ser múltiplo de 9.

2. $ABCDEFG$ es un heptágono regular. AC y BF se cortan en H. AF y CG se cortan en I. Probar que $DE = HI$.

Solución.

Hay varias formas de resolver este problemas. Haremos uso de las múltiples simetrías que tiene un polígono regular con un número impar de lados, en este caso 7.



Por ejemplo, para un cierto eje que pasa por B, se tienen las parejas de puntos simétricos (A, C), (D, G) y (E, F). En particular, los segmentos AC, DG y EF son paralelos entre sí, y perpendiculares al eje. De igual forma, los segmentos AF, BE y CD son paralelos entre sí y perpendiculares a otro eje que pasa por G. Además, BG, CF y DE son paralelos entre sí y perpendiculares a un eje que pasa por A. Etc.

En particular, el cuadrilátero $CEFH$ tiene los lados opuestos paralelos, por lo tanto es un paralelogramo, y entonces los lados opuestos son iguales, es decir $CE = FH$ y $CF = EF$. De forma similar, $CDFI$ también es un paralelogramo, y se tiene que $CD = FI$ y $CI = DF$.

Por otra parte, $CE = DF$ porque son segmentos simétricos con respecto a la simetría antes mencionada cuyo eje pasa por A.

De las igualdades $CD = CH$ y $DF = FH$ se deduce que C y F son puntos de la mediatriz del segmento DH, por tanto los puntos D y H son simétricos respecto a la recta CF. Análogamente, las igualdades $CE = CI$ y $EF = FI$ muestran que E, I son puntos simétricos respecto a CF, y por simetría se concluye que $DE = HI$.

Otra solución: se puede utilizar el hecho de que los 7 vértices del heptágono están sobre una misma circunferencia. Por lo tanto, todos los ángulos indicados en la figura como α son iguales pues inscriben el mismo arco, que es $\frac{1}{7}$ del total de la circunferencia. A partir de estas igualdades de ángulos se puede atacar con éxito el problema, observando que el cuadrilátero $CFIH$ cumple las condiciones para ser cíclico (inscriptible).

3. Se tiene un tablero cuadriculado de tamaño 4×4, y una cantidad ilimitada de fichas de dominó, cada una de tamaño tal que podría colocarse ocupando exactamente dos casillas contiguas del tablero (se consideran casillas contiguas las que tienen un lado común). Un *movimiento* (o *paso*, o *jugada*) consiste en colocar una ficha de dominó ocupando exactamente dos casillas contiguas del tablero, sin salirse fuera del mismo y sin solaparse con ninguna otra ficha previamente colocada. Inicialmente el tablero está vacío. Después de n movimientos, se observa que ya no es posible colocar ninguna ficha más mediante movimientos permitidos.

Determinar el menor valor de n para el cual es posible esta situación.

Solución.

Es sencillo comprobar que para $n = 6$ es posible la situación descrita en el enunciado. Basta colocar 6 fichas orientadas horizontalmente recubriendo las 12 casillas indicadas con una X en la Figura 0, donde X significa casilla ocupada, y O hueco.

```
Fig 0      Fig 1      Fig 2      Fig 3      Fig 4      Fig 5

O X X O    O X . .    X O . .    O X X O    O X . .    O X . .
X X X X    X O . .    O X . .    X O O X    X O . .    X O X .
X X X X    . . . .    . . . .    . . . .    . . O X    . X O X
O X X O    . . . .    . . . .    . . . .    . . X O    . . X O
```

Al no haber dos huecos contiguos, ya no caben más fichas.

A continuación probaremos que siempre que hayamos colocado legalmente 5 fichas, en cualquier posición y orientación, cabrá una sexta ficha. Esto probará que para $n = 5$ no es posible la situación del enunciado, y se concluirá que el mínimo buscado es 6.

Cuando llevamos colocadas 5 fichas, hay 10 casillas ocupadas y 6 huecos, a repartir entre 4 cuadrados 2×2. Si uno de estos cuadrados contuviera ≥ 3 huecos, habría dos casillas contiguas vacías donde colocar una sexta ficha. Podemos entonces asumir que los 4 cuadrados tienen ≤ 2 huecos, luego debe haber al menos 2 de ellos que tengan exactamente 2 huecos.

Nos fijamos en el cuadrado 2×2 superior izquierdo. Si tiene 2 huecos, éstos no pueden ser contiguos pues entraría una nueva ficha, luego deben estar colocados como en las Figuras 1 o 2. Pero la Fig 2 es imposible, porque si una casilla "esquina" es cubierta, la ficha que la cubre debe cubrir también una casilla vecina. Por lo tanto, generalizando este razonamiento a cualquiera de los cuadrados 2×2 que tenga 2 huecos, se tiene que los huecos deben estar en la casilla esquina y en la casilla perteneciente al cuadrado 2×2 central.

De esta manera, si los dos cuadrados con 2 huecos fueran contiguos, se tendría sin pérdida de generalidad (salvo simetrías o rotaciones del tablero) la situación de la Figura 3, donde se ve claramente que hay 2 huecos contiguos.

Y si los dos cuadrados con 2 huecos no son contiguos, se tiene sin pérdida de generalidad la situación de la Figura 4, que irremediablemente conduce a la de la Figura 5, si queremos evitar huecos contiguos a los 4 ya existentes.

Finalmente, en la Figura 5 tenemos 6 casillas X que deben ser cubiertas, y ninguna ficha puede cubrir más de una X, por lo que es imposible cubrirlas con 5 fichas.

Agotados todos los casos posibles, la solución está acabada y el mínimo buscado es $n = 6$.

4. Encontrar razonadamente todas las raíces posibles del polinomio $P(Q(x))$, siendo

$$P(x) = (x-2)(x-p) \qquad \text{y} \qquad Q(x) = x^2 + 4x - 7,$$

sabiendo que al menos una de ellas tiene multiplicidad 2 (es una raíz doble).

Solución.

A partir del enunciado obtenemos

$$P(Q(x)) = (Q(x)-2)(Q(x)-p) = (x^2+4x-7-2)(x^2+4x-7-p),$$

o lo que es lo mismo,

$$P(Q(x)) = (x^2+4x-9)(x^2+4x-7-p).$$

Nótese que el factor x^2+4x-9 tiene dos raíces reales distintas, que son $-2 \pm \sqrt{13}$. Para que exista una raíz doble, estudiaremos dos casos: (i) una raíz del primer factor también lo es del segundo factor, y (ii) el segundo factor tiene una raíz doble que no es raíz del primer factor.

Caso (i): sea α una raíz de ambos factores, es decir, $\alpha^2+4\alpha-9=0$ y $\alpha^2+4\alpha-7-p=0$, igualdades que restadas implican $p=2$. Entonces el polinomio estudiado es

$$P(Q(x)) = (x^2-4x-9)(x^2-4x-9),$$

y sus raíces son $-2+\sqrt{13}$ y $-2-\sqrt{13}$, ambas dobles.

Caso (ii): $x^2+4x-7-p$ tiene una raíz doble, lo que implica que su discriminante es nulo, es decir $4^2-4(-7-p)=0$, de donde se obtiene que $p=-11$. En este caso, el segundo factor es x^2+4x+4, con raíz doble -2, siendo las raíces de $P(Q(x))$: -2 doble, $-2+\sqrt{13}$ y $-2-\sqrt{13}$.

5. En un juego, Antón elige como número inicial un entero $n \geq 0$ que no sea un cuadrado perfecto. Berta suma a ese número el entero siguiente, $n+1$. Si esta suma es un cuadrado perfecto, ha ganado ella. En caso contrario, Antón suma $n+2$ a la suma anterior. Si la nueva suma es cuadrado perfecto, ha ganado él. En caso contrario, el turno vuelve a Berta, quien suma $n+3$, y así sucesivamente.

   Probar que existen infinitos números iniciales que dan la victoria a Antón.

   Solución.

   Veamos qué tiene que ocurrir para que Antón gane en su segundo turno. El número inicial es n. Cuando Berta suma $n+1$ se obtiene $2n+1$, y al sumar Antón $n+2$ llegamos a $3n+3 = 3(n+1)$. Pues bien, si $n+1 = 3x^2$, para cierto entero x, entonces el número $3(n+1)$ es igual a $9x^2 = (3x)^2$, un cuadrado perfecto. Esto prueba que Antón siempre consigue un cuadrado perfecto en su segundo turno, si elige inicialmente $n = 3x^2 - 1$, para cierto x entero. Para confirmar la victoria de Antón debemos probar que n es un número inicial válido y que Berta no ha ganado en su turno. Es decir, ni n ni $2n+1$ deben ser cuadrados perfectos. Lo cual efectivamente se cumple, ya que $n = 3x^2 - 1$ y $2n + 1 = 6x^2 - 1$ son congruentes con 2 módulo 3, luego no pueden ser cuadrados perfectos. En consecuencia, Antón gana (al menos) para la sucesión infinita de números iniciales $n = 3x^2 - 1$, con $x = 1, 2, 3, \ldots$. Con independencia de que haya o no otros valores iniciales para los que Antón pueda ganar a partir de su tercer turno, ya hemos encontrado infinitos números iniciales que le dan la victoria.

6. Se define la sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ para n entero positivo, de la manera siguiente:

$$a_1 = 1; \qquad a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}),\ n > 1.$$

Determinar, razonadamente, el valor de a_{2018}.

Solución.

Es importante "cargarse" los puntos suspensivos en $a_1 + \cdots + a_{n-1}$. Una posibilidad es despejar dicha expresión en la definición de a_{n+1}, es decir

$$a_1 + \cdots + a_{n-1} = a_n \cdot \frac{(n-1)}{(n+1)}.$$

De forma similar, cambiando n por $n+1$ se obtiene

$$a_1 + \cdots + a_n = a_{n+1} \cdot \frac{n}{(n+2)}.$$

Restando las dos igualdades tenemos que

$$a_n = a_{n+1} \cdot \frac{n}{(n+2)} - a_n \cdot \frac{(n-1)}{(n+1)},$$

de donde puede despejarse

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{2(n+2)}{n+1}.$$

La igualdad anterior puede expresarse en la forma más conveniente

$$\frac{a_{n+1}}{n+2} = 2 \cdot \frac{a_n}{n+1}.$$

Si definimos $b_n = \frac{a_n}{n+1}$, esto implica que $b_{n+1} = 2b_n$, de lo que se deduce inmediatamente que $b_n = 2^{n-1} b_1$. Dado que $b_1 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}$, tenemos que $b_n = 2^{n-2}$, y entonces $a_n = (n+1)b_n = (n+1)2^{n-2}$, permitiéndonos concluir que $a_{2018} = 2019 \cdot 2^{2016}$.

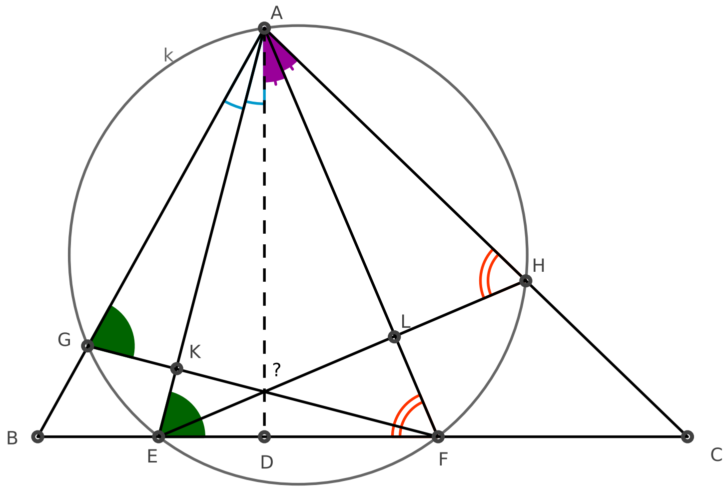
Otra solución. Hallando los primeros valores de a_n es posible conjeturar que $a_n = (n+1)2^{n-2}$ para todo n entero positivo, y luego debe demostrarse esta conjetura por inducción.

7. Sea ABC un triángulo acutángulo y AD una de sus alturas ($D \in BC$). Las bisectrices interiores de los ángulos $B\widehat{A}D$ y $C\widehat{A}D$ cortan al lado BC en los puntos E y F, respectivamente. La circunferencia circunscrita del triángulo AEF corta a los lados AB y AC (de ABC) en G y H, respectivamente.

   Demostrar que las rectas EH, FG y AD pasan por un punto común.

Solución.

Sean $K = FG \cap AE$ y $L = EH \cap AF$. Veamos una representación gráfica de la situación geométrica del problema.



Por tratarse de ángulos inscritos, se tiene que $\angle AGF = \angle AEF$. Por otra parte, $\angle GAK = \angle EAD$ por ser AE bisectriz de $\angle GAD$. Esto prueba que los triángulos GAK y EAD tienen dos de los tres ángulos iguales, luego sus terceros ángulos coinciden, es decir, $\angle AKG$ es igual a $\angle ADE$, que es 90^o.

Razonando de forma similar con los triángulos DAF y LAH, se prueba que $\angle ALH = 90^o$. Por consiguiente, las rectas EH, FG y AD son las tres alturas del triángulo AEF ($EH \perp AF$, $FG \perp AE$ y $AD \perp EF$), lo que implica que se cortan en un punto común, el ortocentro de AEF.