LIV Olimpiada Matemática Española

Fase Cero, León-Ponferrada

Viernes 24 de noviembre de 2017

- La prueba dura dos horas y media y consta de dos partes.
- La primera parte consiste en 12 preguntas, cada una con 5 opciones posibles (A, B, C, D, E), una sola de las cuales es correcta. Cada respuesta correcta vale 5 puntos, cada respuesta incorrecta vale 0 puntos, y cada pregunta que se deje sin contestar vale 1 punto.
- En la segunda parte hay 4 preguntas de respuesta numérica (el resultado es un número real: 0, -5, π, -3.73, $\frac{1}{4}$, $\frac{\sqrt[4]{2018}}{7}$, etc.). Cada respuesta correcta vale 10 puntos, y las respuestas incorrectas o dejadas en blanco valen 0 puntos.
- Al finalizar la prueba y antes de entregar esta hoja, copia en la tabla (sin tachar ni borrar) las opciones elegidas para las preguntas 1 a 12 (A, B, C, D, E o dejar en blanco), y la solución numérica en las preguntas 13 a 16.
- No está permitido el uso de teléfonos móviles, calculadoras ni cualquier otro tipo de dispositivo electrónico.

Nombre y apellidos: ....

Colegio/Instituto: .... Curso: ....

Respuestas:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Primera parte

1. ¿Cuántos son los números de 6 cifras, formados por las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, y divisibles por 1, 2, 3, 4, 5 y 6?

   (A) Ninguno (B) 1 (C) 18 (D) 120 (E) 360

2. En el país olímpico circulan tres tipos de monedas: las aritméticas, las combinatorias y las geométricas. Dos monedas aritméticas valen lo mismo que tres combinatorias, y dos monedas combinatorias se cambian por una aritmética más tres geométricas. ¿Cuántas monedas geométricas equivalen a una aritmética?

   (A) 6 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) No hay datos suficientes para determinarlo.

3. El pequeño Juangauss lee en su libro de latín "XV=15"; y se pregunta: "¿Cuántos son los pares ordenados distintos (X, V) de números enteros (eventualmente negativos), cuyo producto es igual a 15?" *Nota: (2,-1) y (-1,2) son, por ejemplo, dos pares ordenados distintos de números enteros.* ¿Cuál es la respuesta a la pregunta de Juangauss?

   (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

4. Felipe escribe algunos números en su cuaderno. Inicialmente escribe 2; luego, para escribir un nuevo número parte del último número escrito y le aplica las siguientes operaciones, en este orden: divide entre 2, suma 2, multiplica por 2, resta 2. ¿Cuántos números habrá escrito Felipe después de apuntar el primer número de cuatro cifras?

   (A) 1000 (B) 998 (C) 500 (D) 10 (E) Ninguna de las anteriores

5. Un número se denomina *palíndromo* (o bien *capicúa*) si la secuencia de sus cifras no cambia si se lee de izquierda a derecha o de derecha a izquierda; por ejemplo, 36563 es capicúa. ¿Cuántos son los números palíndromos de 5 cifras tales que la suma de sus cifras es par?

   (A) 450 (B) 550 (C) 700 (D) 900 (E) 1000

6. En un paralelogramo las longitudes de los lados son $a, 2a, a, 2a$, y uno de los ángulos interiores mide 60^o. Sabiendo que el área es 1, ¿cuánto mide la diagonal menor?

   (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{2\sqrt[4]{3}}{3}$ (C) 1 (D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (E) $\sqrt[4]{3}$

7. Ana escribe una sucesión de 10 números de manera que cada término a partir del tercero sea igual a la suma de los dos términos precedentes. Sabiendo que el primer término es 34 y el último 0, ¿cuánto vale la suma de todos los términos de la sucesión?

   (A) -34 (B) 0 (C) 22 (D) 68 (E) 88

8. Sabiendo que a, b son números reales positivos tales que $a^2(a-3b) = b^2(b-3a)$, ¿cuántos valores distintos puede alcanzar el cociente $\frac{a}{b}$?

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 5 (E) infinitos

9. En un juego numérico, siempre que hay escrito un número en la pizarra, se sustituye por su cuadrado aumentado en 5. Si Marta escribe en la pizarra un número entero par y juega doce veces a este juego, ¿cuál podría ser la última cifra del número resultante?

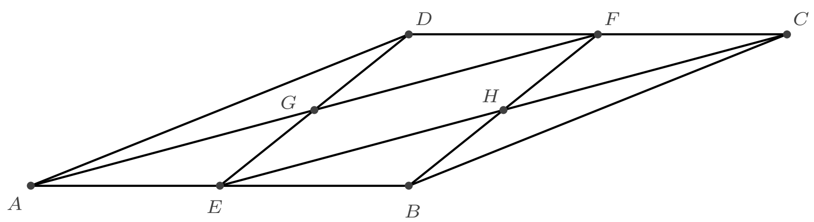
(A) 0 o 4 (B) 0, 4 o 6 (C) 0 o 6 (D) 4 o 6 (E) 0, 2, 4, 6 u 8.

10. En un sucesión de 2017 números, el primero es 1, el segundo 0, y cada uno de los siguientes términos es igual a la diferencia de los dos términos precedentes, en este orden: el tercero es el segundo menos el primero, el cuarto es el tercero menos el segundo, y así sucesivamente. ¿Cuánto vale el último término de la secuencia?

(A) -2017 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2017

11. En el paralelogramo $ABCD$ de la figura, el segmento BD es perpendicular a AB, y E, F son los puntos medios de AB, CD, respectivamente. Calcular el área del cuadrilátero $GEHF$, sabiendo que $AB = 5$ y $BD = 2$.

(A) $\frac{15}{8}$ (B) 2 (C) $\frac{9}{4}$ (D) $\frac{5}{2}$ (E) 3



12. En cada casilla de un tablero de ajedrez 8×8 está escrito un número entero. Las filas y las columnas están numeradas de 1 a 8, y la casilla correspondiente a la fila 1 y columna 1 es negra. La suma de los números escritos en las casillas blancas es 28, mientras que la suma de los números escritos en las columnas impares es 47. Si se cambia el signo a todos los números que se encuentran en las casillas blancas, ¿cuánto valdrá ahora la suma de todos los números que se encuentran en las filas impares?

(A) -14 (B) 19 (C) 33 (D) 75 (E) Los datos no son suficientes para determinarlo.

Segunda Parte

13. Un tablero de ajedrez 8×8 tiene sus casillas numeradas del 1 al 64, en la primera fila 1, 2, ..., 8, en la segunda fila 9, 10, ..., 16, y así sucesivamente. Cada casilla con un número múltiplo de 3 se pinta de azul. Determinar el mayor número posible de torres que pueden colocarse sobre las casillas azules, de manera que ninguna fila o columna contenga más de una torre (es decir, ninguna torre amenaza capturar a otra).

14. Carla está situada en un jardín rectangular. Las distancias (en metros) hacia los vértices son, en algún orden, 6, 7, 9 y d, siendo d una cantidad entera. Hallar d.

15. Hallar el producto de todas las soluciones de la ecuación

$$X = \frac{X^{\log_{2017} X}}{\sqrt{2017}}.$$

Nota: $\log_{2017} X$ es un número a tal que $2017^a = X$.

16. Para cada entero positivo n, se define

$$g_n = \text{mcd}\left(27 + n^2, 27 + (n+1)^2\right),$$

siendo mcd el máximo común divisor. Determinar el menor valor de n para el cual g_n alcanza su valor máximo.

Respuestas correctas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	B	E	C	A	E	C	B	C	D	D	B	7	2	2017	54

Soluciones y origen de los problemas

1. Fuente: I Giochi di Archimede (competición olímpica italiana), Gara Biennio, año 2011, problema propuesto por X.Y. Lu.

   Un número divisible por 1, 2, 3, 4, 5 y 6 es divisible por 10, su última cifra es necesariamente 0. No existe ningún número cumpliendo las condiciones del enunciado, la respuesta correcta es (A).

2. Fuente: adaptado de I Giochi di Archimede 2011, problema propuesto por F. Mugelli.

   Planteamos las ecuaciones $2A = 3C$ y $2C = A + 3G$. Multiplicando la primera igualdad por 2 y la segunda por 3 se tiene $4A = 6C$ y $6C = 3A + 9G$, de donde se deduce que $4A = 3A + 9G$, es decir, $A = 9G$, y la respuesta correcta es (B).

3. Fuente: I Giochi di Archimede 2011, problema propuesto por G. Paolini.

   Nótese que 15 tiene 8 divisores distintos: $\{\pm1, \pm3, \pm5, \pm15\}$. Si X es uno cualquiera de estos divisores, se tiene que $V = \frac{15}{X}$ es un número entero verificando $XV = 15$, por lo tanto hay 8 pares ordenados cumpliendo las condiciones del enunciado:

   $$(1, 15), (3, 5), (5, 3), (15, 1), (-1, -15), (-3, -5), (-5, -3), (-15, -1).$$

   La respuesta correcta es (E).

4. Fuente: I Giochi di Archimede 2011, problema propuesto por L. Ghidelli.

   Partiendo de un número x, el siguiente será

   $$x \to \frac{x}{2} \to \frac{x}{2} + 2 \to 2\left(\frac{x}{2} + 2\right) \to 2\left(\frac{x}{2} + 2\right) - 2 = x + 2,$$

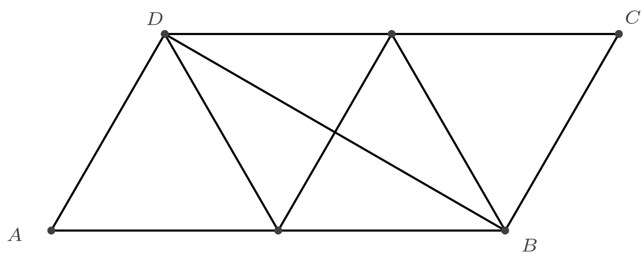
   es decir, para pasar de un número al siguiente, Felipe simplemente suma 2. La sucesión $2, 4, \ldots, 998, 1000$ tiene 500 términos, por lo que la respuesta correcta es (C).

5. Fuente: I Giochi di Archimede 2011, problema propuesto por M. Carbone.

   Un palíndromo genérico de 5 cifras puede escribirse como $abcba$, con $a > 0$, mientras b, c pueden ser nulos. Además, la suma de todos los dígitos es $2a + 2b + c$, lo que obliga a que c sea par. En consecuencia, hay 9 posibilidades para a (1,2,...,9), 10 posibilidades para b (0,1,...,9) y 5 para c (0,2,4,6,8). La solución es $9 \times 10 \times 5 = 450$, opción (A).

6. Fuente: I Giochi di Archimede 2011, problema propuesto por G. Paolini.

   Si dividimos a la mitad cada uno de los lados grandes y unimos algunos puntos, vemos que el paralelogramo está formado por 4 triángulos equiláteros congruentes entre sí, algo así:



   Cada uno de estos triángulos tiene área $\frac{1}{4}$. Por otra parte, la altura de un triángulo equilátero de lado a es $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, y su área es $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, de donde se obtiene que $a = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. Además, es fácil ver que el triángulo ABD es rectángulo en D, y el cateto BD mide el doble de la altura de uno de los equiláteros:

   $$BD = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{3}.$$

   La respuesta correcta es (E).

7. Fuente: I Giochi di Archimede 2011, problema propuesto por M. Carbone.

   Si x es el segundo término, la secuencia completa de 10 números es

$$34, x, 34 + x, 34 + 2x, 2 \cdot 34 + 3x, 3 \cdot 34 + 5x, 5 \cdot 34 + 8x, 8 \cdot 34 + 13x, 13 \cdot 34 + 21x, 21 \cdot 34 + 34x,$$

   y la suma de todos los números es $55 \cdot 34 + 88x$. El valor de x se obtiene igualando a 0 el décimo término, $21 \cdot 34 + 34x = 0$, es decir, $x = -21$, lo que da una suma total de $55 \cdot 34 + 88(-21) = 22$, opción (C).

8. Fuente: I Giochi di Archimede 2011, problema propuesto por G. Paolini.

   Manipulamos la igualdad del problema:

$$a^2(a - 3b) = b^2(b - 3a) \Rightarrow a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = 0 \Rightarrow (a - b)^3 = 0 \Rightarrow a - b = 0.$$

   Es decir, $a = b$, con lo que $\frac{a}{b}$ toma un único valor, el 1, respuesta correcta (B).

9. Fuente: I Giochi di Archimede 2011, problema propuesto por D. Lombardo.

   Si en la pizarra está escrito el número x, tras dos juegos se tendrá

$$x \to x^2 + 5 \to (x^2 + 5)^2 + 5 = x^4 + \underbrace{10x^2 + 30}_{\text{múltiplo de 10}},$$

   es decir, la última cifra será la última cifra de x^4. Como x acaba en $0, 2, 4, 6, 8$, se comprueba que x^4 siempre acaba en 0 o 6. Hemos probado que después de dos juegos, la cifra final siempre es 0 o 6. Finalmente, dado que 12 es par, tras 12 juegos también se tendrá que la última cifra es 0 o 6, respuesta correcta (C).

10. Fuente: I Giochi di Archimede 2011, problema propuesto por S. Di Trani.

    Veamos los primeros términos de la sucesión:

$$a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -1, a_4 = -1, a_5 = 0, a_6 = 1, a_7 = 1, a_8 = 0, \dots$$

    Puesto que $a_7 = a_1$ y $a_8 = a_2$, a partir de ahora la sucesión irá repitiendo valores de 6 en 6. Dado que 2017 da resto 1 al dividir entre 6, se tendrá que $a_{2017} = a_1 = 1$, opción (D).

11. Fuente: I Giochi di Archimede 2011, problema propuesto por D. Lombardo.

    El segmento EF es paralelo a los lados AD y BC. En consecuencia, los cuadriláteros $ADFE$ y $BCFE$ son paralelogramos, y en ellos las diagonales se cortan en sus puntos medios. Es decir, G es el punto medio común de AF y DE, mientras que H es el punto medio de BF y CE. Es sencillo ver que el área del triángulo EFG es la cuarta parte del área del cuadrilátero $ADFE$, y el área de EFH es la cuarta parte de la de $BCFE$, lo que implica que el área de $GEHF$ es la mitad de $ADEF$, que es igual a la cuarta parte de $ABCD$, cuya área es $AB \cdot BD = 5 \cdot 2 = 10$. La solución es $\frac{10}{4}$, opción (D).

12. Fuente: I Giochi di Archimede 2011, problema propuesto por G. Paolini.

    Clasificamos las casillas del tablero en cuatro categorías, y denotaremos por a, b, c, d la suma de las casillas de cada categoría:

    $a =$ suma de las casillas situadas en fila impar y columna impar, su color es negro.

    $b =$ suma de las casillas situadas en fila impar y columna par, su color es blanco.

    $c =$ suma de las casillas situadas en fila par y columna impar, su color es blanco.

    $d =$ suma de las casillas situadas en fila par y columna par, su color es negro.

    Así, el enunciado se traduce en las igualdades $b + c = 28$ y $a + c = 47$. Por otra parte, el cambio de signo transforma b en $-b$ y c en $-c$, por lo que la suma de las casillas en filas impares es $a - b$. Finalmente, se tiene que

$$a - b = (a + c) - (b + c) = 47 - 28 = 19, \quad \text{respuesta correcta (B).}$$

13. Fuente: Propuesto por A. Sáez-Schwedt.

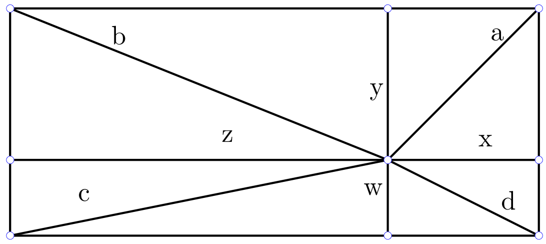
    Consideramos solamente las casillas azules:

		3			6		
9			12			15	
	18			21			24
		27			30		
33			36			39	
	42			45			48
		51			54		
57			60			63	

Vemos primero que es posible colocar 7 torres sobre los múltiplos de 9 (9, 18, ..., 63) que se encuentran alineados diagonalmente, o sea que el máximo buscado es al menos 7.

Probaremos ahora que no es posible colocar más de 7 torres. Basta encontrar una combinación de 7 líneas, entre horizontales y verticales, que recubran todas las casillas azules. Dicha combinación existe, elíjanse por ejemplo las filas 3 y 6 y las columnas 1, 3, 4, 6 y 7 (las que están sombreadas). Dado que estas 7 líneas no pueden contener más de 7 torres, esto completa la demostración de que el máximo pedido es 7.

14. Fuente: Olimpiada Matemática de Malasia 2011, Junior A1.



Si las distancias de Carla hacia los bordes del rectángulo son x, y, z, w, entonces las diagonales a, b, c, d pueden calcularse mediante el teorema de Pitágoras, y verifican:

$$a^2 = x^2 + y^2, b^2 = y^2 + z^2, c^2 = z^2 + w^2, d^2 = w^2 + x^2,$$

en particular $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Es decir, $d^2 = a^2 - b^2 + c^2$. Debemos encontrar alguna asignación de los valores $\{6, 7, 9\}$ a las variables a, b, c tal que $a^2 - b^2 + c^2$ sea un cuadrado perfecto.

Entre las posibles formas de sumar dos de los elementos $\{6^2, 7^2, 9^2\}$ y restar el tercero, el único cuadrado perfecto que se forma es $6^2 + 7^2 - 9^2 = 4 = 2^2$, lo que implica que $d = 2$.

15. Fuente: adaptado de la Olimpiada Matemática de Malasia 2011, Junior A6.

Sea a tal que $2017^a = X$. Planteamos la ecuación $X = \frac{X^a}{\sqrt{2017}}$ y escribimos todo en potencias de 2017: $X = 2017^a$, $X^a = (2017^a)^a = 2017^{a^2}$, y $\sqrt{2017} = 2017^{\frac{1}{2}}$. La ecuación se transforma en

$$2017^a = \frac{2017^{a^2}}{2017^{\frac{1}{2}}} = 2017^{a^2 - \frac{1}{2}},$$

lo que permite igualar los exponentes $a = a^2 - \frac{1}{2}$. Si esta ecuación de segundo grado tiene soluciones a_1, a_2, entonces las soluciones de la ecuación del enunciado son $X_1 = 2017^{a_1}$ y $X_2 = 2017^{a_2}$, y su producto es $2017^{a_1+a_2}$, que vale 2017, ya que la suma de las raíces de la ecuación $a^2 - a - \frac{1}{2} = 0$ es 1 (recordar las relaciones de Cardano-Vieta).

16. Fuente: Olimpiada Matemática de Tailandia 2000.

Se utilizará repetidamente la propiedad siguiente: si A y B son múltiplos de g, también los es cualquier suma o resta de múltiplos de A y múltiplos de B. De esta manera “se baja el grado de n”. Por ejemplo, como g_n divide a $n^2 + 27$ y $(n+1)^2 + 27$, divide a su diferencia, que es $2n + 1$. Y puesto que g_n divide a los números $n^2 + 27$ y $2n + 1$, también divide al número $2(n^2 + 27) - n(2n + 1)$, que resulta ser $54 - n$. Y dado que $2n + 1$ y $54 - n$ son múltiplos de g_n, también lo es $(2n + 1) + 2(54 - n)$, que es 109. Todo lo anterior prueba que g_n es un divisor de 109, por lo que el valor máximo que puede alcanzar es 109.

Buscamos ahora el menor valor de n para el cual g_n sea igual a 109. Como $2n + 1$ y $54 - n$ deben ser múltiplos de 109, esto no ocurre para ningún valor de $n < 54$. Probamos con $n = 54$. Se tiene que $27 + n^2 = 27 + 54^2 = 27 \cdot 109$, y $27 + (n + 1)^2 = 27 + 55^2 = 28 \cdot 109$, y el mcd de ambos es 109. La respuesta es $n = 54$.