LIII Olimpiada Matemática Española

Fase Cero, León-Ponferrada

Viernes 25 de noviembre de 2016

- La prueba consta de 20 preguntas, cada una con cinco posibles respuestas A, B, C, D, E, una sola de estas opciones es correcta.
- Cada respuesta contestada correctamente vale 5 puntos, cada respuesta incorrecta vale 0 puntos, y cada pregunta que se deje sin contestar vale 1 punto.
- Al finalizar la prueba y antes de entregar esta hoja, copia en la tabla (sin tachar ni borrar) las opciones elegidas para cada pregunta, dejando en blanco las casillas correspondientes a las preguntas no contestadas.
- Tiempo disponible: 2 horas y 30 minutos.
- No está permitido el uso de teléfonos móviles, calculadoras o cualquier otro tipo de dispositivo electrónico.

Nombre y apellidos: ....

Colegio/Instituto: ....

Respuestas:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

---

1. En el país olímpico circulan cuatro tipos de monedas: las aritméticas, las algebraicas, las combinatorias y las geométricas. Una moneda aritmética vale una algebraica más una combinatoria más una geométrica. Dos monedas aritméticas valen tanto como una algebraica más tres combinatorias más cinco geométricas. Si un olímpico entra en una tienda con una moneda algebraica y sale con una combinatoria, ¿cuánto ha pagado en monedas geométricas?

$$(A)2 \quad (B)3 \quad (C)4 \quad (D)5 \quad (E)6$$

2. (Fracciones con expresiones decimales periódicas) ¿Cuánto es $(1,\overline{3}) \times (0,\overline{3})$?

$$(A)0,\overline{4} \quad (B)0,4\overline{3} \quad (C)0,4 \quad (D)\tfrac{13}{33} \quad (E) \text{ ninguna de las anteriores.}$$

3. Sean a, b, c números enteros de los cuales se sabe que $a^2bc = 1$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sin duda?

(A) $a = 1$ y $b = 1$ (B) $a = -1$ y $c = 1$ (C) $b^2ac = 1$ (D) $a \neq 1$ (E) $a^2b^2 = 1$.

4. Numerolandia dista de Geometrilandia 4 horas de viaje. Carlos sale de Numerolandia a las 4 de la mañana, hora local, y debido al cambio de huso horario llega a Geometrilandia a la hora local del almuerzo. Si Carlos emprende la vuelta dos horas después, ¿a qué hora llega de regreso a Numerolandia?

(A) a las 12 (B) a las 14 (C) a las 15 (D) a las 16
(E) Depende de a qué hora almuerzan en Geometrilandia.

5. Si $\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}$, ¿cuánto vale $\frac{c}{b}$?

$(A)\frac{a^2-b^2}{b^2}$ $(B)\frac{a^2+b^2}{b^2}$ $(C)\frac{a^3-b}{b^2}$ $(D)\frac{a^3-b^3}{a+b}$ $(E)\frac{a^2}{b^2}$

6. Miriel, Mariel y Muriel deciden que al grito de YA! cada una dirá (de forma simultánea y al azar), una de las palabras $\{BIM, BAM, BUM\}$. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres digan la misma palabra?

(A) Menos de $\frac{1}{12}$ (B) Entre $\frac{1}{12}$ y $\frac{1}{10}$ (C) Entre $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{8}$ (D) Entre $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{6}$ (E) Más de $\frac{1}{6}$.

7. ¿Cuántas cifras tiene el número 20^{10}?

$(A)10$ $(B)11$ $(C)13$ $(D)14$ $(E)15$

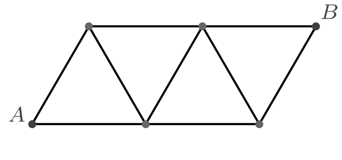
8. Si $x > 5$, ¿cuál de las siguientes fracciones es la menor?

$(A)\frac{5}{x}$ $(B)\frac{5}{x+1}$ $(C)\frac{5}{x-1}$ $(D)\frac{x}{5}$ $(E)\frac{x+1}{5}$

9. Una máquina dispensadora de gominolas tiene dos botones y un recipiente: el primer botón hace entrar 16 gominolas en el recipiente, el segundo botón aumenta un 50% el contenido de gominolas del recipiente. Insertando una moneda, se puede pulsar uno cualquiera de los dos botones, a nuestra elección. Si inicialmente el recipiente está vacío, ¿cuál es el mayor número de gominolas que podemos hacer entrar al recipiente insertando 5 monedas?

$(A)70$ $(B)80$ $(C)88$ $(D)96$ $(E)108$

10. Se construye un paralelogramo pegando cuatro triángulos equiláteros de lado $10cm$ como en la figura. ¿Cuánto distan (en cm) los vértices opuestos A y B?



$(A)25$ $(B)\sqrt{675}$ $(C)\sqrt{700}$ $(D)\sqrt{825}$ $(E)30$

11. En una cierta fábrica hay solamente dos tipos de empleados: dirigentes y operarios. Cada dirigente recibe un salario equivalente a cuatro veces el de cada operario. El coste total que le supone a la fábrica pagar los sueldos de todos sus empleados es igual a seis veces el coste de pagar los sueldos de todos los dirigentes. ¿Cuántos operarios hay por cada dirigente?

$(A)\frac{4}{5}$ $(B)5$ $(C)6$ $(D)20$ $(E)24$

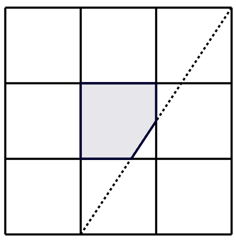
12. Un número primo de 3 cifras tiene los dígitos a, b, c en ese orden. Determinar el número de divisores primos que tiene el número de 6 cifras cuya escritura decimal es $abcabc$ (recordar que 1 no es un número primo):

$$(A)1 \quad (B)2 \quad (C)4 \quad (D)15 \quad (E)16$$

13. De la lista $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$, ¿qué número está en la posición 2016?

$$(A)45 \quad (B)50 \quad (C)56 \quad (D)60 \quad (E)63$$

14. El cuadrado grande de la figura se divide en 9 cuadraditos iguales. ¿Qué fracción del área del cuadrado grande ocupa la región sombreada?



$$(A)\tfrac{11}{108} \quad (B)\tfrac{1}{9} \quad (C)\tfrac{5}{54} \quad (D)\tfrac{1}{12} \quad (E)\tfrac{13}{81}$$

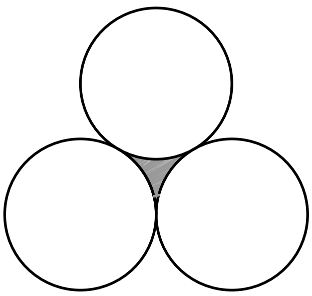
15. Si se sabe que $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = x$, ¿cuál es el valor de $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots$?

$$(A)\tfrac{1}{2}x \quad (B)\tfrac{5}{8}x \quad (C)\tfrac{2}{3}x \quad (D)\tfrac{3}{4}x \quad (E)\tfrac{13}{16}x$$

16. Ocho jugadores, de los cuales 4 son atacantes y 4 defensores, organizan un torneo de billar. Cada posible pareja atacante-defensor juega exactamente una vez contra cada una de las otras posibles parejas atacante-defensor (y sin que nadie juegue contra sí mismo, claro está). ¿Cuántas partidas se juegan en total en el campeonato?

$$(A)24 \quad (B)36 \quad (C)48 \quad (D)72 \quad (E)144$$

17. Las tres circunferencias de la figura tienen radio 1 y son tangentes dos a dos. Calcular el área comprendida entre las tres circunferencias (región sombreada de gris en la figura):

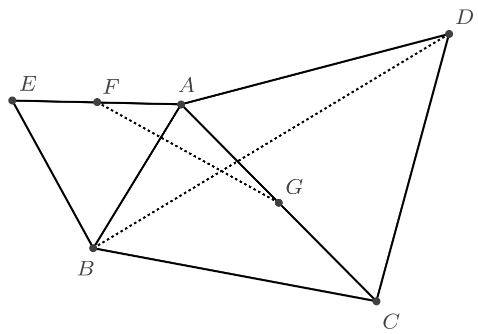


$$(A)(\sqrt{3} - \tfrac{\pi}{2}) \quad (B)\pi - \sqrt{3} \quad (C)\tfrac{\sqrt{3}}{6} \quad (D)\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\sqrt{3}}{3} \quad (E)\tfrac{1}{4}$$

18. ¿Cuál es el resultado de la suma $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{49}+\sqrt{50}}$?

$$(A)6 \quad (B)\sqrt{50} - 1 \quad (C)7 \quad (D)\sqrt{50} \quad (E)10$$

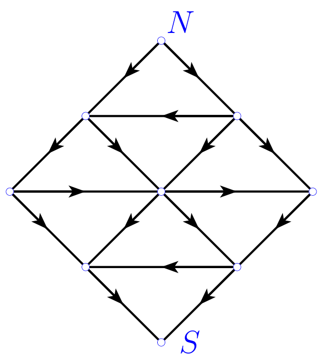
19. En la siguiente figura ABC es un triángulo cualquiera y ACD y AEB son triángulos equiláteros.



Si F y G son los puntos medios de EA y AC, respectivamente, la razón $\frac{BD}{FG}$ vale:

(A) siempre $\frac{3}{2}$,
(B) siempre 2,
(C) siempre otro valor a, siendo $a \neq 2$ y $a \neq \frac{3}{2}$.
(D) cualquier valor entre 1 y 2, dependiendiendo del triángulo ABC,
(E) cualquier valor entre $\frac{1}{2}$ y 2, dependiendo del triángulo ABC.

20. Siguiendo la dirección y sentido de las flechas del diagrama, ¿de cuántas formas distintas se puede ir de N hasta S?



$(A)6 \quad (B)7 \quad (C)16 \quad (D)24 \quad (E)29$

Soluciones

Para cada problema se mencionará en primer lugar la respuesta correcta, y luego se dará una breve justificación.

1. La respuesta correcta es (B), 3 monedas geométricas. Si a la segunda frase se le resta dos veces la primera frase, resulta que cero es igual a menos una moneda algebraica más una combinatoria más tres geométricas, o lo que es lo mismo, una algebraica menos una combinatoria son tres geométricas.

2. La respuesta correcta es (A), $0,\overline{4}$, ya que $(1,\overline{3}) \times (0,\overline{3})$ corresponde a la multiplicación de fracciones
$$(1+\frac{1}{3}) \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9} = 0,4444\ldots$$

3. La respuesta correcta es (E), $a^2b^2 = 1$. Al ser $a^2bc = 1$ y a, b, c enteros, necesariamente debe ocurrir que a, b, c tomen los valores 1 o -1, que son los únicos divisores de 1, o sea que a^2, b^2 y c^2 valen 1. Por lo tanto, la afirmación (E) es cierta con total seguridad, sin importar cuáles de las variables a, b, c valgan 1 y cuáles -1. Las restantes afirmaciones pueden ser falsas para algunas combinaciones de valores de a, b, c que hacen cierta la hipótesis $a^2bc = 1$. Por ejemplo, $a = 1, b = -1, c = -1$ cumplen $a^2bc = 1$ y hacen que (A), (B), (C) y (D) sean falsas.

4. La respuesta correcta es (B), Carlos regresa a las 14 horas pues transcurren 10 horas desde que sale (4+4=8 horas viajando, y 2 horas de estancia en Geometrilandia).

5. La respuesta correcta es (A). Dado que en todas las opciones propuestas intervienen solamente a, b, esto sugiere despejar c en la hipótesis, para luego ver cuánto vale $\frac{c}{b}$ en función de a, b. De $\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}$ se deduce que $a^2 = b^2 + bc$, por tanto $c = \frac{a^2-b^2}{b}$ y finalmente $\frac{c}{b} = \frac{a^2-b^2}{b^2}$.

6. La respuesta correcta es (C). Dado que hay tres chicas y cada una puede elegir entre tres opciones, el número total de posibilidades que pueden darse es $3\times3\times3 = 27$, y podemos asumir que estas 27 opciones tienen la misma probabilidad. Los casos favorables son 3: (BIM,BIM,BIM), (BAM,BAM,BAM) Y (BUM,BUM,BUM), por lo que la probabilidad pedida es $\frac{3}{27} = \frac{1}{9}$, que se encuentra entre $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{8}$.

7. La respuesta es (D), 14 cifras, ya que
$$20^{10} = (2 \cdot 10)^{10} = 2^{10} \cdot 10^{10} = 1024 \cdot 10^{10},$$
un número de 4 cifras seguido de 10 ceros.

8. La respuesta es (B). Es claro que (A) y (B) son menores que 1 mientras que (D) y (E) son mayores que 1, por tanto la fracción menor no puede ser ni (D) ni (E). Por otra parte, (A), (B) y (C) tienen el mismo numerador y un denominador positivo, por lo que pueden ordenarse así: $\frac{5}{x+1} < \frac{5}{x} < \frac{5}{x-1}$, siendo el menor valor $\frac{5}{x+1}$.

9. La respuesta es (E), 108 gominolas. La estrategia más simple consiste en elegir para cada moneda el botón que maximice la cantidad de gominolas. Empezando por 0 se obtiene la sucesión de valores 16, 32, 48, 72, 108, tras pulsar las dos primeras veces el primer botón, las dos últimas el segundo botón, y en el tercer paso cualquiera de los dos botones, ya que ambos aumentan de 32 a 48.

Habría que justificar que esta estrategia es la óptima. Si en determinado momento el recipiente contiene una cantidad n de gominolas, al pulsar el primer botón tendremos $n+16$, en cambio al pulsar el segundo botón se tendrían $\frac{3n}{2}$. Nótese que las funciones $f(n)=n+16$ y $g(n)=\frac{3n}{2}$ son estrictamente crecientes: si $a<b$, se tiene que $f(a)<f(b)$ y $g(a)<g(b)$. Esto quiere decir que si $a<b$ son dos posibles cantidades de gominolas alcanzables con cuatro monedas, cualquiera que sea el botón pulsado en la quinta moneda, siempre b producirá más gominolas que a. En otras palabras, cualquier combinación de pulsaciones que no produzca el máximo para 4 monedas debe ser descartada. De igual forma, para alcanzar el máximo tras 4 monedas ha de haberse llegado antes al máximo para 3, y así sucesivamente. La estrategia más simple resulta ser la óptima.

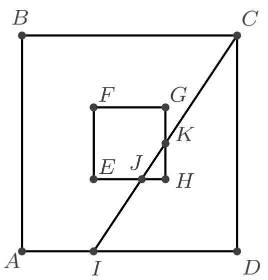
10. La respuesta es (C), a lo que se puede llegar de dos maneras distintas. Una forma consiste en llamar h a la altura de uno de estos triángulos equiláteros y observar que AB es la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene un cateto $3h$ y otro igual a5 (medio lado). Aplicando el teorema de Pitágoras, $AB^2=3^2h^2+5^2=9h^2+25$. Por otra parte, h es un cateto en un triángulo rectángulo que tiene hipotenusa 10 y el otro cateto 5, por lo que $h^2=10^2-5^2=75$, en consecuencia $AB^2=9\cdot 75+25=700$. La otra manera consiste en aplicar el teorema del coseno a un triángulo con lados 10, 20 y AB, siendo 120^o el ángulo comprendido entre los lados de longitudes 10 y 20.

11. La respuesta es (D), 20 operarios por cada dirigente. Sean x, y el número de operarios y dirigentes, respectivamente, y sea s el salario de un dirigente. Los datos del problema permiten asegurar que $xs+(4s)y=6(4s)y$, por lo que $xs=24sy-4sy$, de donde $x=20y$.

12. La respuesta es (C), 4 divisores primos. Si llamamos p al número que se escribe abc, está claro que el número que se escribe $abcabc$ es $abc+abc000$, es decir, $p+1000p=1001p$. Puesto que 1001 es producto de tres primos $7\times 11\times\times 13$, y p es mayor que todos ellos, se tiene que $1001p$ es producto de 4 primos.

13. La respuesta es (E). Para cada $n\geq 1$, si empezamos escribiendo 1 vez 1, 2 veces 2, etc., al acabar el lote de "n veces n', habremos llegado hasta la posición $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Para $n=63$ se cumple precisamente que $\frac{63\cdot 64}{2}=2016$.

14. La respuesta es (A).



Si suponemos que $ABCD$ es un cuadrado de área 1, basta calcular el área del polígono $EFGKJ$, que es igual al área del cuadrado $EFGH$ menos el área del triángulo JKH. El área de $EFGH$ es $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$. Observando que la recta IC tiene pendiente $\frac{3}{2}$, es fácil ver que $JH=\frac{1}{9}$ y $KH=\frac{1}{6}$, por lo que JKH tiene área $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{108}$, y la región sombreada tiene área $\frac{1}{9}-\frac{1}{108}=\frac{11}{108}$.

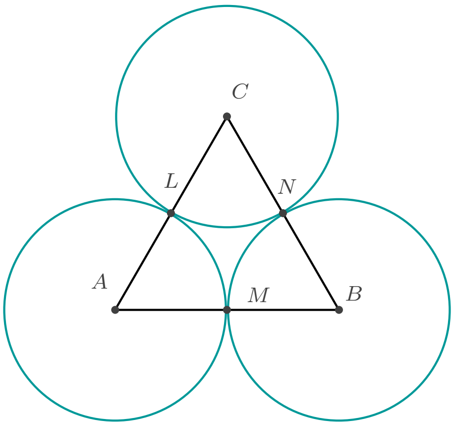
15. La respuesta correcta es (D). Para ello, obsérvese que x es la suma de los inversos de los cuadrados de todos los números naturales, que puede escribirse como la suma de los inversos de los cuadrados de los pares, más la suma de los inversos de los cuadrados de los impares:

$$x=\left(\frac{1}{(2\cdot 1)^2}+\frac{1}{(2\cdot 2)^2}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)=\frac{1}{2^2}\cdot\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)$$

Llamando y a la cantidad buscada, se tiene que $x = \frac{x}{4} + y$, por lo que $y = \frac{3x}{4}$.

16. La respuesta es (D). Hay $4 \times 4 = 16$ posibles parejas. Si A es un atacante y D un defensor, la pareja AD jugará contra otras $3 \times 3 = 9$ parejas, las que pueden formarse sin utilizar ni A ni D. Repitiendo este razonamiento para cada pareja, tendremos $16 \times 9 = 144$ enfrentamientos. Pero en este proceso, cada enfrentamiento está siendo contado dos veces, ya que AD contra $A'D'$ es el mismo partido que $A'D'$ contra AD. Por tanto, el número de partidos es $\frac{144}{2} = 72$.

17. La solución es (A).

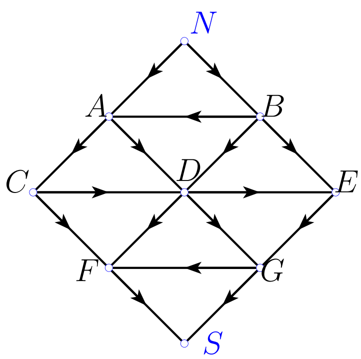


Empezamos observando que los centros deben formar un triángulo equilátero de lado 2, y los puntos medios de los lados son los puntos de tangencia. El área pedida es igual al área del triángulo equilátero ABC (que vale $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3}$), menos el área de tres sectores circulares, cada uno de los cuales es igual a la sexta parte de un círculo de radio 1 (estos sectores son los delimitados por los puntos ALM, BMN y CNL, cada uno de ellos abarca en el círculo que lo contiene un ángulo de 60^o, la sexta parte de 360^o). Por lo tanto, la solución se obtiene de restar $\sqrt{3}$ menos $\frac{3}{6}$ de un círculo, resultando $\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$.

18. La respuesta correcta es (B). Para cada $n = 1, \ldots, 49$, se puede sustituir el cociente $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ por la diferencia $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, ya que $(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 1$, lo que resulta de aplicar la propiedad $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ a los números $a = \sqrt{n+1}$ y $b = \sqrt{n}$. Así, la suma de los dos primeros términos de la sucesión es $\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = \sqrt{3} - 1$, la suma de los tres primeros términos es $\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} = \sqrt{4} - 1$, y así sucesivamente, hasta sumar los 49 términos, cuyo resultado es $\sqrt{50} - 1$.

19. La respuesta es (B), siempre 2. Para ello, primero observamos que el segmento CE es el doble de FG, ya que FG es una de las paralelas medias del triángulo AEC, la paralela al lado CE. Por lo tanto, debemos probar que BD y CE son iguales. Si consideramos el giro o rotación de centro A y ángulo de 60 grados en sentido antihorario, considerando la figura del enunciado vemos que C va a parar a D y E a B, por tanto el segmento CE se transforma en DB, y se tiene que $DB = CE$, ya que los giros preservan las longitudes de segmentos correspondientes. En consecuencia, $\frac{BD}{FG} = \frac{CE}{FG} = 2$, para cualquier triángulo ABC.

20. La respuesta es (E), hay 29 caminos desde N hasta S.



Con paciencia (bastante) podría resolverse el problema por fuerza bruta, enumerando exhaustivamente todos los caminos que llevan de N a S, por ejemplo $NACFS$, $NADFS$, etc.

Solución más sencilla. Para cada nodo etiquetado con una letra mayúscula, utilizaremos la misma letra en minúsculas para denotar el número de formas de llegar hasta ese punto, partiendo desde N. Por ejemplo, a es el número de formas de llegar hasta A, b son las maneras de llegar a B, etc.

Observemos que se puede llegar a S solamente desde F y acabando con la flecha $\overrightarrow{FS}$, o bien desde G acabando con $\overrightarrow{GS}$. Todas las formas de llegar hasta F o G pueden completarse hasta un camino que termina en S, y todos estos caminos son distintos, ya que unos acaban en $\overrightarrow{FS}$ y otros en $\overrightarrow{GS}$. Por lo tanto, se tiene $\boxed{n = f + g}$. De igual forma, el número de caminos que acaban en un nodo es igual a la suma de todos los caminos que acaban en cada uno de los nodos desde donde podemos acceder, por ejemplo, $d = a + b + c$, ya que a D se accede desde A, B o C. Empezando por $n = 1$ (pues hay una sola forma de llegar de N a N), se van realizando sucesivamente los siguientes cálculos:

$$
\begin{aligned}
&b = n = 1\\
&a = n + b = 1 + 1 = 2\\
&c = a = 2\\
&d = a + b + c = 2 + 1 + 2 = 5\\
&e = b + d = 1 + 5 = 6\\
&g = d + e = 5 + 6 = 11\\
&f = c + d + g = 2 + 5 + 11 = 18\\
&s = f + g = 18 + 11 = 29
\end{aligned}
$$