LI Olimpiada Matemática Española

Fase Local, León-Ponferrada

Viernes 16 de enero de 2015

Primera sesión

1. Se tienen cuatro números enteros cualesquiera cuya suma sea par. Una *jugada* consiste en elegir dos de estos números y sumarle a ambos una misma cantidad entera. Probar que es posible conseguir cuatro números iguales, después de tres o menos jugadas.

2. Seis jugadores organizan un torneo a cinco jornadas y partidas individuales, de manera que cada participante juega en cada jornada contra un adversario distinto, y al finalizar el torneo cada pareja de jugadores debe haberse enfrentado una vez. Demostrar que, independientemente de cómo se organice el torneo, al terminar la tercera jornada siempre habrá al menos un conjunto de tres jugadores que ya han jugado todas las partidas entre ellos.

3. ABC es un triángulo con $AB = AC$, y M, N son los puntos medios de AB, AC respectivamente. Sea L un punto tal que $\widehat{MBL} = \widehat{MCL} = 90^o$. Probar que LN es perpendicular a BC.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas.

LI Olimpiada Matemática Española

Fase Local, León-Ponferrada

Viernes 16 de enero de 2015

Segunda sesión

4. Los enteros positivos x, y, z cumplen

$$x + 2y = z, \qquad x^2 - 4y^2 + z^2 = 310$$

Hallar todos los posibles valores del producto xyz.

5. Un aula de clase tiene 24 asientos distribuidos en 6 filas con 4 asientos en cada fila. Inicialmente hay una persona sentada en cada asiento. Diremos que dos personas A, B se intercambian de sitio si A se sienta donde estaba B y B donde estaba A. Dos personas se consideran vecinas de fila si ocupan asientos contiguos en la misma fila. Determinar el mínimo número de intercambios que deben realizarse para asegurar que cada persona tenga vecinos de fila distintos de los que tenía en la disposición inicial.

6. Aragorn (A) coloca una ficha roja en uno de los 7 vértices de un heptágono regular, y luego Boromir (B) coloca una ficha azul sobre otro vértice distinto. A y B continúan jugando alternadamente, cada uno en su turno colocando una ficha de su color sobre un vértice no ocupado. ¿Puede B evitar que A coloque sus fichas rojas sobre los vértices de un trapecio?

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas.

Soluciones

Para cada problema presentamos aquí una posible forma de llegar a la solución, pero no es la única manera de demostrar lo que se pide. Como en todos los problemas propuestos en olimpiadas matemáticas, puede haber varias soluciones igualmente válidas para un mismo problema.

Algunas dudas surgidas durante el desarrollo de las pruebas, sobre la interpretación de los enunciados.

Problema 1. En una jugada se suma la misma cantidad entera a los dos números, pero esa cantidad puede variar entre una jugada y otra. Los cuatro números iniciales no tienen por qué ser necesariamente distintos, la única restricción es que la suma sea par. Y por supuesto, hay que demostrar que lo pedido se cumple para todas las combinaciones de cuatro números con suma par, no basta con elegir una cualquiera y resolver ese caso particular.

Problema 5. Los intercambios pueden realizarse entre dos posiciones cualesquiera. Si al final una persona tiene dos vecinos de fila, ambos deben ser distintos de los vecinos de fila iniciales.

Problema 6. El juego se desarrolla por turnos: A, B, A, B, A, B, A, hasta ocupar los 7 vértices del heptágono. Se trata de ver si A tiene una estrategia que le asegure obtener siempre un trapecio, o si por el contrario B tiene una estrategia para impedirlo.

1. Se tienen cuatro números enteros cualesquiera cuya suma sea par. Una *jugada* consiste en elegir dos de estos números y sumarle a ambos una misma cantidad entera. Probar que es posible conseguir cuatro números iguales, después de tres o menos jugadas.

Supongamos los números ordenados en la forma $a \leq b \leq c \leq d$.

Se consideran las siguiente situaciones:

1) Si $a = b$ y $c = d$, se llega al objetivo con una única jugada, que puede no ser necesaria si ya se tiene $a = b = c = d$.

2) Si $b - a = d - c$, cantidad que llamamos k, basta una jugada para llegar a la situación 1): sumarle k a los números a, c. Por lo tanto, desde la situación 2) se llega al objetivo en un máximo de dos jugadas.

3) En el caso general $a \leq b \leq c \leq d$, veamos que basta una jugada (o ninguna) para alcanzar la situación 2). Realizaremos las siguiente jugada:

	a	b	c	d
Jugada		$+x$	$+x$	
Resultado	a	$b+x$	$c+x$	d

Queremos que la diferencia entre $a, b+x$ sea igual a la diferencia entre $c+x, d$, es decir, $b + x - a = d - (c + x)$, lo cual se consigue si $x = \frac{a-b-c+d}{2}$. Observar que $a - b - c + d$ es par, ya que al sumarle la cantidad par $2b + 2c$ se obtiene $a + b + c + d$, que por hipótesis es par. Por lo tanto, x es un número entero, y la jugada es válida.

Esto prueba que en (a lo sumo) una jugada se llega a la situación 2), que requiere como máximo dos jugadas para alcanzar el objetivo final.

Otra solución. Podría plantearse desde el principio la siguiente estrategia:

	a	b	c	d
Jugada 1		$+x$	$+x$	
Jugada 2	$+y$		$+y$	
Jugada 3	$+z$	$+z$		
Resultado	$a+y+z$	$b+x+z$	$c+x+y$	d

Para que los cuatro números sean iguales, x, y, z deben satisfacer:

$$\{y + z = d - a, \quad x + z = d - b, \quad x + y = d - c\},$$

un sistema de ecuaciones cuyas soluciones son:

$$x = \frac{a - b - c + d}{2}, y = \frac{-a + b - c + d}{2}, z = \frac{-a - b + c + d}{2}.$$

Nótese que las soluciones son enteras, ya que los numeradores son números pares (se razona como en la solución anterior). Este enfoque es igualmente válido pero menos elemental, pues exige resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

2. Seis jugadores organizan un torneo a cinco jornadas y partidas individuales, de manera que cada participante juega en cada jornada contra un adversario distinto, y al finalizar el torneo cada pareja de jugadores debe haberse enfrentado una vez. Demostrar que, independientemente de cómo se organice el torneo, al terminar la tercera jornada siempre habrá al menos un conjunto de tres jugadores que ya han jugado todas las partidas entre ellos.

---

a) Solución elemental sugerida por Daniel Lasaosa Medarde (Universidad Pública de Navarra), antiguo olímpico.

Decimos que un *trío* es un conjunto de tres jugadores tales que, tras las tres primeras rondas, han jugado todas las posibles partidas entre sí. Sea A uno cualquiera de los seis jugadores, y supongamos que no está en ningún trío. En las tres primeras jornadas, A ha jugado con tres jugadores, que llamaremos B, C, D. Como A no forma parte de un trío, B, C y D no han podido jugar ninguna partida entre sí (ya que los dos que hayan jugado una partida entre sí formarían un trío con A). Pero entonces es imposible completar el calendario de enfrentamientos, porque B, C y D no han jugado ninguna partida entre sí, y solamente quedan dos jornadas por disputar, pero son necesarias tres jornadas para realizar las tres partidas entre ellos. En consecuencia, A debe pertenecer a un trío, pues suponer lo contrario nos ha llevado a una contradicción.

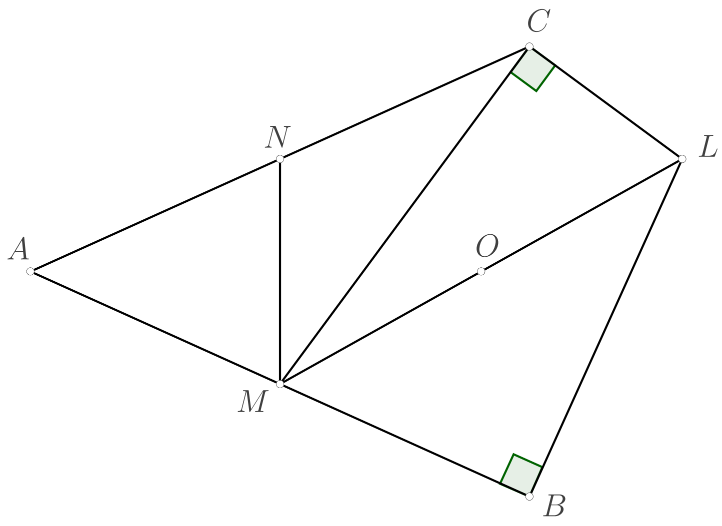
b) Otra posible solución consiste en analizar las dos últimas jornadas, y probar que existe un grupo de tres jugadores tales que no han jugado entre sí ninguna partida, esto es equivalente a resolver el problema original.

b-1) Un simple análisis cuidadoso resuelve el problema en su formulación b).

b-2) Otra forma de resolver la formulación b). Asignamos a cada jugador un vértice de un hexágono. El número de triángulos que pueden formarse con esos seis puntos es $\binom{6}{3} = \frac{6\cdot5\cdot4}{3!} = 20$. Cada vez que se juega una partida, unimos con un segmento los vértices correspondientes a los dos jugadores que se enfrentan. Diremos que un triángulo está *cubierto* si al menos uno de sus lados fue marcado. Dado que cada segmento pertenece a 4 triángulos, y en las dos últimas jornadas se marcan $2 \cdot 3 = 6$ segmentos, el número de triángulos cubiertos es $6 \cdot 4 = 24$. Por otra parte, en esas dos últimas jornadas hay dos aristas marcadas para cada punto (para un jugador A las aristas podrían ser por ejemplo AB y AC), por lo tanto en el recuento anterior el triángulo ABC fue contado dos veces. Razonando de igual forma con cada vértice, vemos que hay al menos 6 triángulos (distintos) que fueron contados dos veces. En consecuencia, las dos últimas jornadas cubren como máximo $24 - 6 = 18$ triángulos distintos, y quedan al menos $20 - 18 = 2$ triángulos sin cubrir. Esos dos triángulos no cubiertos en las dos últimas jornadas corresponden a tríos de jugadores que no han jugado ninguna partida entre sí en esas dos jornadas, luego han debido jugar todas sus partidas durante las tres primeras jornadas.

Evidentemente esta última solución es demasiado compleja para un problema sencillo como éste, pero la hemos incluido con el ánimo de ilustrar “ideas combinatorias” que pueden ser útiles en problemas más difíciles.

3. ABC es un triángulo con $AB = AC$, y M, N son los puntos medios de AB, AC respectivamente. Sea L un punto tal que $\widehat{MBL} = \widehat{MCL} = 90^o$. Probar que LN es perpendicular a BC.



Solución utilizando solamente propiedades elementales. Si O es el punto medio de la hipotenusa ML en el triángulo rectángulo MBL, es conocido que $OM = OB = OL$ (O es el circuncentro de MBL), y razonando en el triángulo rectángulo MCL se tiene que $OM = OC = OL$. Por ser $OB = OC$, O es un punto de la mediatriz de BC. Pero MN y BC tienen la misma mediatriz, que es la bisectriz del ángulo en A, por lo tanto $OM = ON$, y se tiene la igualdad de segmentos $OL = OM = ON$, es decir, O es el circuncentro de MNL. Finalmente, el hecho de que el circuncentro de un triángulo sea el punto medio de uno de los lados implica que el ángulo en el vértice opuesto es necesariamente recto, $\widehat{LNM} = 90^o$, y como MN es paralela a BC (paralela media), se concluye que LN es perpendicular a BC.

Solución trabajando con propiedades de los ángulos inscritos en una circunferencia. Como $MN||BC$, resulta que N está en la circunferencia ω que pasa por B, C, M, porque en el cuadrilátero $BMNC$ la suma de los ángulos opuestos es 180^o. Por otra parte, L también pertenece a esa circunferencia ω, porque el cuadrilátero $BMCL$ tiene dos ángulos opuestos rectos. Dado que ML es un diámetro de ω (arco capaz de 90^0), se deduce que $\widehat{MNL} = 90^o$.

Solución aplicando el teorema de Pitágoras. Las igualdades $MB^2 + LB^2 = ML^2$ y $MC^2 + LC^2 = ML^2$ implican que $LB^2 - LC^2 = MC^2 - MB^2$. Además, de la simetría de la figura se deduce que $BN = CM$ y $BM = CN$, luego $MC^2 - MB^2 = NB^2 - NC^2$. Por lo tanto $LB^2 - LC^2 = NB^2 - NC^2$, condición equivalente a que NL sea perpendicular a BC (esto último se demuestra llamando P, Q a las proyecciones de L, N sobre BC, aplicando varias veces Pitágoras se llega a que $PB^2 - PC^2 = QB^2 - QC^2$ y se concluye que P, Q son el mismo punto).

4. Los enteros positivos x, y, z cumplen

$$x + 2y = z, \qquad x^2 - 4y^2 + z^2 = 310$$

Hallar todos los posibles valores del producto xyz.

De la primera igualdad se tiene $2y = z - x$, y elevando al cuadrado $4y^2 = z^2 - 2xz + z^2$, lo cual sustituido en la segunda ecuación nos da $2xz = 310$, es decir $xz = 155$.

Dado que $155 = 5 \cdot 31$ y que $z > x$ (ya que $z - x = 2y$, entero positivo), las únicas posibilidades para x, z son:

- $x = 1, z = 155$, lo que implica $y = 77$ y entonces $xyz = 155 \cdot 77 = 11935$.
- $x = 5, z = 31$, lo que implica $y = 13$ y entonces $xyz = 155 \cdot 13 = 2015$.

Se comprueba que las dos opciones cumplen las dos ecuaciones del enunciado, concluyendo que los posibles valores de xyz son 11935 y 2015. El año de la Olimpiada, no podía faltar.

5. Un aula de clase tiene 24 asientos distribuidos en 6 filas con 4 asientos en cada fila. Inicialmente hay una persona sentada en cada asiento. Diremos que dos personas A, B se intercambian de sitio si A se sienta donde estaba B y B donde estaba A. Dos personas se consideran vecinas de fila si ocupan asientos contiguos en la misma fila. Determinar el mínimo número de intercambios que deben realizarse para asegurar que cada persona tenga vecinos de fila distintos de los que tenía en la disposición inicial.

Etiquetamos a los alumnos según este esquema:

```
X X * *
* * X X
X X * *
* * X X
X X * *
* * X X
```

Tenemos 12 "fichas de dominó" orientadas horizontalmente, cada ficha cubriendo dos personas vecinas. Para cada ficha, al menos una de las dos personas debe moverse, para destruir la "relación de vecindad" entre ellas. Por lo tanto, al menos 12 alumnos deben cambiarse de sitio. Como cada intercambio de sitio mueve de lugar a dos personas, debe haber al menos 6 intercambios.

Por otra parte, veamos que es posible alcanzar el objetivo efectuando 6 intercambios, para lo cual etiquetamos a los alumnos según este otro esquema:

```
X * X *
X * X *
* X * X
* X * X
X * X *
X * X *
```

Si se intercambia cada `X` con su vecino `X` más cercano (6 intercambios en total), este procedimiento destruye todas las relaciones horizontales de vecindad, y como hemos visto que no es posible realizar menos de 6 intercambios, la solución pedida es 6.

Además de la indicada en la segunda figura, evidentemente existen muchas otras formas válidas de organizar 6 intercambios que cumplan las condiciones pedidas.

6. Aragorn (A) coloca una ficha roja en uno de los 7 vértices de un heptágono regular, y luego Boromir (B) coloca una ficha azul sobre otro vértice distinto. A y B continúan jugando alternadamente, cada uno en su turno colocando una ficha de su color sobre un vértice no ocupado. ¿Puede B evitar que A coloque sus fichas rojas sobre los vértices de un trapecio?

Veamos qué ocurre si las 3 fichas de B ocupan un triángulo isósceles. Orientando dicho triángulo en la forma Λ, con los lados laterales iguales, los 7 vértices del heptágono quedan distribuidos de la siguiente manera: un eje de simetría vertical que pasa por el vértice superior del triángulo, y tres segmentos con extremos simétricos respecto al eje, estos tres segmentos son perpendiculares al eje y paralelos entre sí. Uno de estos segmentos es la base del triángulo, y los otros dos forman un trapecio.

Probaremos que si A utiliza una estrategia adecuada siempre obligará a B a situarse sobre un triángulo isósceles azul, con lo cual se formará un trapecio rojo con los 4 puntos restantes.

Lema 1.- *De los 5 triángulos que contienen a dos puntos dados, 3 son isósceles y 2 son escalenos.* En efecto, sean X, Y dos puntos cualesquiera, situados a una distancia relativa de 1, 2 o 3 vértices (por simetría basta considerar estos tres casos con Y en la mitad derecha de la figura). Marcamos los restantes puntos como I o E, según el triángulo que se completa con ese punto resulte ser respectivamente isósceles o escaleno, y vemos que en cada caso hay tres I y dos E, lo cual prueba el lema.

```
     X             X              X
  I     Y        E    I        I     E
 E       I     I       Y      I       E
   I   E         I   E          I   Y
```

Además, la siguiente condición siempre se cumple en todos los casos: colocando el eje de simetría en el primer punto (X), el compañero del segundo punto (Y) siempre es I, y cada una de las otras dos parejas de simétricos son siempre I-E o E-I.

Esto proporciona la siguiente **estrategia para A: conseguir que su primera y segunda fichas sean simétricas respecto a la primera ficha que coloque B**. De esta manera, cuando B haga su segunda jugada, sus dos puntos X, Y se corresponderán con una de las tres figuras anteriores (o sus simétricas). En virtud del Lema 1, a B le quedarán dos posiciones posibles para completar con XY un triángulo escaleno, pero de esas dos formas habrá una ya ocupada por A (al ser los dos primeros puntos de A simétricos respecto de X, éstos serán una de las parejas I-E de las tres figuras del Lema 1). Solamente queda una forma de que B complete un triángulo escaleno. Dado que es el turno de Aragorn (A), si coloca su ficha en esa posición, obliga a B a situarse sobre un triángulo isósceles azul, y entonces A completará un trapecio rojo sin que B pueda evitarlo.

Ejemplo de cómo aplica A su estrategia.

```
     -            B             B            B
  -     -      -     -       -     -      -     -   ......
 A       -     A       -    A       A    A       A
   -   -         -   -        -   -        B   -
```

A y B marcan un vértice cada uno. A se coloca en la posición simétrica de su primera ficha, respecto a la primera ficha de B. Juegue donde juegue B, quedarán tres posiciones libres, siempre en dos de ellas se forma un triángulo isósceles con las dos fichas de B, y en una de ellas se forma un escaleno. Si A juega sobre la posición "escaleno", no le deja a B más opción que formar un isósceles, y gana A.

Otra solución. Un ex-olímpico (David Martínez Rubio) nos ha sugerido un método ingenioso para etiquetar los vértices, evitando tener que distinguir varios casos.

Marcamos con un 6 al vértice donde B pone su primera ficha, y unimos mediante un segmento cada pareja de puntos que forman con él un triángulo escaleno (figura izquierda). Los 6 restantes puntos se etiquetan como $0, 1, \ldots, 5$, de manera que dos números consecutivos formen un triángulo escaleno con el 6 (0 y 5 se consideran consecutivos). Trasladando este etiquetado a una nueva figura, vemos que las fichas de B formarán un triángulo escaleno si y sólo si B tiene, además del 6, otros dos vértices vecinos en la figura derecha.

Veamos que A tiene una estrategia sencilla que impide que B consiga un triángulo escaleno. Basta con colocar sus dos primeras fichas en posiciones diametralmente opuestas en la figura derecha. De esta manera, al no haber tres puntos consecutivos sin marcar, a B no le quedarán puntos que tengan dos vecinos libres, por lo tanto para cada nueva jugada de B, A podrá colocar su ficha en la única posición que queda vecina a la de B. Al terminar el juego, en la figura derecha no habrá dos posiciones vecinas ocupadas por B, lo cual trasladado a la figura izquierda significará que las fichas de B no formarán un triángulo escaleno sino isósceles, lo que como se ha visto en la primera solución implica que las fichas de A formarán un trapecio.

Ejemplo: A juega su primera ficha, y luego juega B. Al etiquetar la ficha de B como 6, supongamos que la etiqueta de la primera ficha de A resulta ser 2. Entonces A juega su segunda ficha en 5. Las únicas relaciones de vecindad que quedan son 0-1 y 3-4. Si B marca un número del conjunto $\{0, 1\}$, A marcará el otro, y lo mismo para el conjunto $\{0, 3\}$.