OLIMPIADA MATEMÁTICA

ACTIVIDADES 2011

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Presentación

Continuamos este año la publicación de este pequeño folleto que recoge los problemas propuestos en las principales actividades relacionadas con la Olimpiada Matemática Española: desde los utilizados en las fases local y nacional de su edición número 47, hasta los de todas las olimpiadas y concursos internacionales en las que los equipos españoles de matemáticas, allí seleccionados, participaron en el año 2010. Con ello pretendemos poner al alcance tanto de profesores como de estudiantes el valioso material de trabajo que suponen los buenos problemas. Esperamos y deseamos que pueda ser utilizado en diferentes actividades de formación, imprescindibles para poder enfrentarse con éxito a cualquier competición matemática; actividades que difícilmente pueden llegar a buen puerto sin la desinteresada y nunca reconocida labor de los profesores de secundaria.

En las páginas que siguen encontraréis sin duda problemas interesantes, atractivos y formativos. Un buen problema puede abordarse desde distintos enfoques, que os invitamos a explorar. Pero un buen problema es sobre todo un reto. Os animamos a aceptarlo, confiando en que disfrutaréis con ello.

La Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO), ha servido de modelo para el resto de competiciones, destinadas a estudiantes de secundaria, que cada año se realizan a lo largo y ancho de los cinco continentes. A diferencia de otras olimpiadas científicas no tiene establecido ningún temario, aunque por tradición los problemas que en ella se proponen, siempre abordables con técnicas elementales, se agrupan alrededor de cuatro grandes bloques: álgebra, geometría, teoría de números y combinatoria. En la web hay excelentes páginas en inglés con abundantes recursos: sirvan como ejemplo las de Art of Problem solving (www.artofproblemsolving.com) y la de Mathlinks (www.mathlinks.ro). Es de destacar asimismo The IMO Compedium (www.imomath.com/), que recoge los problemas de las llamadas "listas cortas", entre los que cada año se eligen los seis que constituyen finalmente la prueba de la Olimpiada Internacional. No son muchas las páginas en español sobre el tema, aunque en la de la Olimpiada Matemática Argentina (www.oma.org.ar) puede encontrarse también variado material.

Deseamos agradecer de todo corazón el trabajo altruista de cuantos hacen posible, año tras año, la Olimpiada Matemática Española. Estamos especialmente agradecidos a los estudiantes, que cada año participan en ella con ilusión, y a sus profesores, que los alientan y ayudan. La RSME, a través de su Comisión de Olimpiadas, espera ser capaz de ofrecerles el apoyo y soporte matemático que necesiten.

María Gaspar Alonso-Vega

Índice

Introducción

Como cada año desde 1964, la Real Sociedad Matemática Española organizó la 47 Olimpiada Matemática Española (OME). Lo hizo a través de los Delegados de Distrito o Comunidad, y bajo la coordinación de la Comisión de Olimpiadas de la RSME con la colaboración del Ministerio de Educación y Ciencia. La OME se desarrolla en dos fases: la primera o Fase Local, se celebró a primeros de año y en ella se escogieron los estudiantes que representaron a cada distrito en la Segunda Fase. Este año la segunda fase, que es de ámbito nacional, se celebró a finales de marzo en Pamplona y en ella se seleccionaron los miembros del equipo español que han representado a nuestro país en la Olimpiada Internacional (IMO), celebrada en Amsterdam (Países Bajos) en julio pasado, y la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas celebrada en San José (Costa Rica) en septiembre.

Como hacen otros países de nuestro entorno es fundamental que nuestros estudiantes se preparen lo mejor posible, dentro de nuestras posibilidades, para competir en estos concursos.

Cada año, el equipo español que acude a la IMO es invitado a participar en Olimpiadas internacionales de ámbito regional previas a la IMO. Procuramos asistir a algunas de ellas como parte de la preparación del equipo español. En junio fuimos invitados a Bucarest (Rumanía) para participar en la quinta edición del International Mathematical Archimede Contest (IMAC-2011) juntamente con la República de Moldavia, Bulgaria, Serbia y Rumanía. Este concurso fue el inicio de la preparación que realizaron los estudiantes del equipo español en Barcelona antes de partir para la IMO. En este folleto se recogen los enunciados de los Problemas que se propusieron en los concursos mencionados anteriormente, los enunciados y soluciones de las Fases Local y Nacional de la OME 47 y los de las Olimpiadas Mediterránea y IMAC-2011. También se han incluido los enunciados de la IMO y de la Iberoamericana.

José Luis Díaz Barrero

XLVII Olimpiada matemática Española (Primera Fase)

Enunciados

1. *Los años recientes se han podido expresar como sumas, restas y multiplicaciones de números con un mismo y único dígito; por ejemplo:*

$$2009 = 7\times7\times7\times7-7\times7\times7-7\times7, \qquad 2010 = 66\times6\times6-66\times6+6\times6-6$$

¿Se puede hacer lo mismo con el 2011, sin repetir jamás sumandos iguales? Por ejemplo, no es admisible $2011 = 1+1+1+\ldots$.

2. *Dos semirrectas tienen su común origen en el punto* O. *Se considera una circunferencia* C_1 *tangente a ambas semirrectas, cuyo centro está situado a distancia* d_1 *de* O, *y cuyo radio es* r_1. *Se construyen sucesivamente las circunferencias* C_n, *de modo que* C_n *es tangente a las semirrectas, tangente exterior a* C_{n-1} *y tal que la distancia de su centro a* O, d_n, *es menor que* d_{n-1}, *para* $n > 1$. *Halla la suma de las áreas de los círculos limitados por las circunferencias* C_n, *para todo* n, *en función de* r_1 *y* d_1.

3. *Saber cuál es la última cifra de* 2009^{2011} *es muy fácil, pero ¿cuántos ceros preceden a esa última cifra?*

4. *Calcula todos los números enteros* a, b *y* c *tales que* $a^2 = 2\,b^2 + 3\,c^2$.

5. *Dos esferas de radio* r *son tangentes exteriores. Otras tres esferas de radio* R *son tangentes exteriores entre sí, dos a dos. Cada una de estas tres esferas es, además, tangente exterior a las dos primeras. Encuentra la relación entre* R *y* r.

6. *Denotamos por* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *el conjunto de números naturales excluido el cero y por* $\mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ *el conjunto de números naturales incluido el cero. Encuentra todas las funciones* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ *que sean crecientes, es decir* $f(n) \geq f(m)$ *si* $n > m$, *y tales que* $f(nm) = f(n) + f(m)$, *para todo* $n, m \in \mathbb{N}$.

Soluciones

1. *Los años recientes se han podido expresar como sumas, restas y multiplicaciones de números con un mismo y único dígito; por ejemplo:*

$$2009 = 7\times7\times7\times7-7\times7\times7-7\times7, \qquad 2010 = 66\times6\times6-66\times6+6\times6-6$$

¿Se puede hacer lo mismo con el 2011, sin repetir jamás sumandos iguales? Por ejemplo, no es admisible $2011 = 1+1+1+\dots$.

Solución. Si 2011 fuera expresable como sumas, restas y multiplicaciones de números con el mismo dígito a, como cada uno de estos números es divisible por a, se tiene que a es divisor de 2011. Ahora bien, 2011 es un número primo, por tanto $a = 1$.
Es sencillo observar que

$$\begin{aligned} 1000 =&\ \ 1111-111 \\ 2 =&\ \ 111-11\times11+11+1 \end{aligned}$$

Multiplicando estas dos igualdades se tiene:

$$\begin{aligned} &2000 = \\ &1111\times111-1111\times11\times11+1111\times11+1111-111\times111+ \\ &+111\times11\times11-111\times11-111 \end{aligned}$$

Compruébese que todos los sumandos son distintos entre sí y distintos a 11. Por tanto, sumando 11 al número anterior se tiene una solución.
Existen infinidad de maneras distintas:

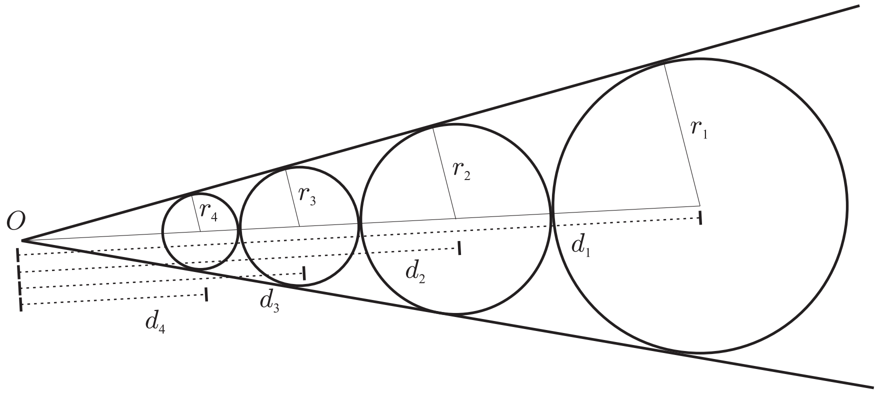
$$2011 = 1111\times1111-111\times11111-111\times111+111\times11\times11-111+11+1$$

o bien

$$2011 = 1111\times1111-111\times11111+1111-111+11$$

2. *Dos semirrectas tienen su común origen en el punto O. Se considera una circunferencia C_1 tangente a ambas semirrectas, cuyo centro está situado a distancia d_1 de O, y cuyo radio es r_1. Se construyen sucesivamente las circunferencias C_n, de modo que C_n es tangente a las semirrectas, tangente exterior a C_{n-1} y tal que la distancia de su centro a O, d_n, es menor que d_{n-1}, para $n > 1$. Halla la suma de las áreas de los círculos limitados por las circunferencias C_n, para todo n, en función de r_1 y d_1.*

Solución. Es claro de la figura que, por el Teorema de Thales, $\dfrac{r_n}{d_n} = \dfrac{r_1}{d_1}$ para



todo n. Llamaremos a este valor α. Además, se tiene que:

$$\frac{r_n}{r_{n+1}} = \frac{d_n}{d_{n+1}} = \frac{d_{n+1} + r_{n+1} + r_n}{d_{n+1}} = 1 + \alpha + \frac{r_n}{d_{n+1}} =$$

$$1 + \alpha + \frac{r_n}{r_{n+1}} \frac{r_{n+1}}{d_{n+1}} = 1 + \alpha + \frac{r_n}{r_{n+1}} \alpha.$$

Despejando se tiene $\dfrac{r_n}{r_{n+1}} = \dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}$, que es constante, luego los radios de las circunferencias forman una progresión geométrica de razón

$$r = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \frac{1 - r_1/d_1}{1 + r_1/d_1} = \frac{d_1 - r_1}{d_1 + r_1}.$$

La suma de áreas buscada es

$$S = \pi \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 = \pi \frac{r_1^2}{1 - (\frac{d_1 - r_1}{d_1 + r_1})^2} = \frac{\pi}{4} \frac{r_1 \, (d_1 + r_1)^2}{d_1}.$$

3. *Saber cuál es la última cifra de 2009^{2011} es muy fácil, pero ¿cuántos ceros preceden a esa última cifra?*

Solución. Si $n \geq 1$,

$$2009^n = (2000 + 9)^n = 9^n + 2000k$$

Por tanto las 3 últimas cifras de 2009^n coinciden con las de 9^n. Por el desarrollo del binomio de Newton:

$$\begin{aligned} &9^{2011} = (10-1)^{2011} = (-1)^{2011} + \tbinom{2011}{1}(-1)^{2010} \cdot 10 + \\ &+\tbinom{2011}{2}(-1)^{2009} \cdot 10^2 + K \cdot 10^3 = -1 + 20110 - 2011 \cdot 1005 \cdot 100 + K \cdot 10^3 \\ &= -202085391 + K \cdot 10^3 = 609 + K' \cdot 10^3 \end{aligned}$$

Luego la respuesta es que 9 es la última cifra y le precede un único cero.

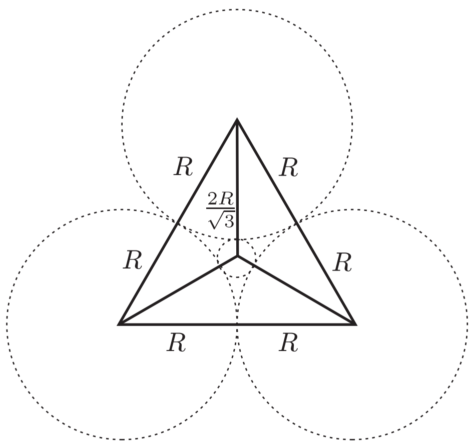
4. *Calcula todos los números enteros a, b y c tales que $a^2 = 2\,b^2 + 3\,c^2$.*

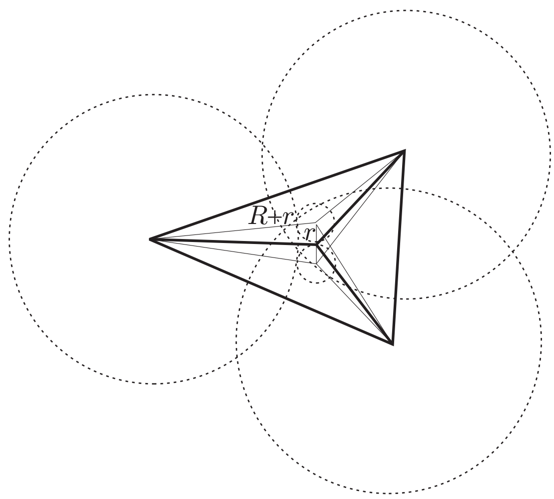
Solución. Sea (a, b, c) una solución distinta de $(0, 0, 0)$, con $|a| + |b| + |c|$ mínimo. Tomando la igualdad módulo 3, tenemos $a^2 = 2b^2$ módulo 3. Como

a^2 y b^2 sólo pueden ser congruentes con 1 o 0, se deduce que a y b son múltiplos de 3. Por tanto, $3c^2$ es múltiplo de 9, así que c también es múltiplo de 3. Pero entonces, $(a/3, b/3, c/3)$ sería otra solución con $|a/3| + |b/3| + |c/3| < |a| + |b| + |c|$, lo que contradice la hipótesis supuesta.

5. *Dos esferas de radio r son tangentes exteriores. Otras tres esferas de radio R son tangentes exteriores entre sí, dos a dos. Cada una de estas tres esferas es, además, tangente exterior a las dos primeras. Encuentra la relación entre R y r.*

Solución. Los centros de las tres esferas de radio R, O_1, O_2 y O_3, son los





vértices de un triángulo equilátero de lado $2R$. El punto de tangencia, T, de las dos esferas de radio r es el centro de ese triángulo y, por tanto, dista de los vértices dos tercios de la altura. La altura del triángulo es $h = \frac{2R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$ y dos tercios de h es $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. Si llamamos Q_1, Q_2 a los centros de las circunferencias de radio r, el triángulo O_1TQ_1 es rectángulo en T y sus lados son: $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, r y $R + r$. Aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2 + r^2 = (R + r)^2$$

y simplificando resulta: $R = 6r$.

6. *Denotamos por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de números naturales excluido el cero y por $\mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de números naturales incluido el cero. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ que sean crecientes, es decir $f(n) \geq f(m)$ si $n > m$, y tales que $f(nm) = f(n) + f(m)$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$.*

Solución.

- La función nula: $f(n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ verifica evidentemente lo anterior.

- Sea f una función no nula verificando las condiciones del enunciado. Entonces

  1. f no es constante, ni está acotada. En efecto, si $f(a) \neq 0$ entonces $f(a^n) = nf(a) > f(a)$ para cada n.
  2. f no es estrictamente creciente:
     - Si $f(2) = f(3)$ ya está.
     - Si $f(2) = a < b = f(3)$, entonces $2^b \neq 3^a$, pero $f(2^b) = ab = f(3^a)$.

  De los dos puntos anteriores se deduce que es posible encontrar un número natural m tal que $k = f(m) = f(m+1) < f(m+2)$. Entonces

  $$f[(m+1)^2] = 2k < f[m(m+2)]$$

  Sin embargo $m(m+2) < (m+1)^2$, contradiciendo el carácter creciente de f.

En consecuencia la única función que verifica las condiciones del enunciado es la función nula.

Enunciados

1. *Se considera el polinomio de segundo grado* $p(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$, *cuyas raíces* x_1 *y* x_2 *se suponen distintas. Justifica que para que* $p(x_1^3) = p(x_2^3)$ *es suficiente que* $a^2+3ac-b^2 = 0$. *¿Es también necesaria esta condición?*

2. *Denotemos* $\mathrm{N}^* = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. *Encuentra todas las funciones crecientes* $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}^*$ *con las siguientes propiedades:*

i) $f(2) = 2$,

ii) $f(nm) = f(n) + f(m)$ *para todo par* $n, m \in \mathrm{N}$.

3. *Un cuadrado* C *se recubre completamente con un número entero de cuadrados de lado unidad, sin solapamientos. Si uno coloca dentro de* C *y sin solapamientos tantos cuadrados como sea posible de área 2, con los lados paralelos a los lados de* C, *se puede cubrir las ocho novenas partes del área del cuadrado. Determina todas las posibles dimensiones de tales cuadrados.*

4. *Consideremos un alfabeto de* n *letras, con el que formaremos palabras. Diremos que una palabra contiene un palíndromo si un trozo de esa palabra, de más de una letra, se lee igual al derecho que al revés. Por ejemplo, la palabra OLIMPIADAS contiene el palíndromo ADA. Siendo* k *un entero mayor que 2, determina cuántas palabras de longitud* k *se pueden formar, con nuestro alfabeto de* n *letras, que no contengan ningún palíndromo de longitud impar.*

5. *Se ordenan los números naturales en forma de tabla triangular, es decir:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & 3 & 4 & & \\ & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ & & & \cdots\cdots\cdots & & & \end{array}$$

Diremos que la posición de un número N *en la tabla viene dada por dos "coordenadas": el primer número de su fila y el primer número de su columna. Por ejemplo, si* $N = 15$, *su posición es* $(10, 9)$. *Cuando un número* N, *en la posición* (n, m), *verifica que* $N = n + m$ *diremos que* N está bien colocado *en la tabla; así 12 y 14 están bien colocados en la tabla y 15 no lo está. ¿Está* 2^{2011} *bien colocado?*

6. *En un triángulo llamaremos* O *al circuncentro,* I *al incentro y* r *al radio de la circunferencia inscrita. Si la mediatriz del segmento* OI *corta a la circunferencia circunscrita en* L, *y* LI *vuelve a cortarla en* M, *demuestra que* $IM = 2r$.

Soluciones

1. *Se considera el polinomio de segundo grado $p(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$, cuyas raíces x_1 y x_2 se suponen distintas. Justifica que para que $p(x_1^3) = p(x_2^3)$ es suficiente que $a^2+3ac-b^2 = 0$. ¿Es también necesaria esta condición?*

Solución.

$$p(x_1^3) - p(x_2^3) = a(x_1^6 - x_2^6) + b(x_1^3 - x_2^3) = (x_1^3 - x_2^3)[a(x_1^3 + x_2^3) + b]$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2}$$

Por tanto

$$p(x_1^3) - p(x_2^3) = (x_1^3 - x_2^3)\left[a\left(-\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2}\right) + b\right] = \frac{b}{a^2}(x_1^3 - x_2^3)(-b^2 + 3ac + a^2)$$

Para que esta diferencia se anule, es suficiente que $-b^2 + 3ac + a^2 = 0$.
La condición no es necesaria. El producto se anula al anularse cualquier factor; el primer paréntesis no se anula, pero b puede anularse. De modo que otra condición suficiente para que $p(x_1^3) = p(x_2^3)$ es que $b = 0$.

2. *Denotemos $\mathrm{N}^* = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Encuentra todas las funciones crecientes $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}^*$ con las siguientes propiedades:*

i) $f(2) = 2$,

ii) $f(nm) = f(n) + f(m)$ *para todo par* $n, m \in \mathrm{N}$.

Solución. De las propiedades se deduce:

1. Haciendo $m = 1$, sigue de ii) $f(1) = 0$.
2. Por inducción finita sobre ii) sigue que $f(n^k) = kf(n)$, $\forall n, k \in \mathrm{N}$.

Veamos si puede construirse una función creciente con estas propiedades. Ya que $f(4) = f(2^2) = 2f(2) = 4$, resulta que los únicos posibles valores de $f(3)$ si f es creciente, son $f(3) = 2$, $f(3) = 3$, $f(3) = 4$.

1. Si $f(3) = 2$, nos encontramos con que $2^3 < 3^2$, pero $f(2^3) = 6 > f(3^2) = 4$.
2. Si $f(3) = 3$, nos encontramos con que $2^{11} < 3^7$, pero $f(2^{11}) = 22 > f(3^7) = 21$.
3. Si $f(3) = 4$, nos encontramos con que $3^3 < 2^5$, pero $f(3^3) = 12 > f(2^5) = 10$.

Así pues, no hay ninguna función creciente con estas propiedades.

3. *Un cuadrado C se recubre completamente con un número entero de cuadrados de lado unidad, sin solapamientos. Si uno coloca dentro de C y sin solapamientos tantos cuadrados como sea posible de área 2, con los lados paralelos a los lados de C, se puede cubrir las ocho novenas partes del área del cuadrado. Determina todas las posibles dimensiones de tales cuadrados.*

Solución. Sea l el lado del cuadrado y n el número máximo de cuadrados de área 2 que caben en cada lado del cuadrado. l y n son enteros. Las condiciones del problema son que

$$\left\{\begin{array}{c} 2n^2 = \frac{8}{9}l^2 \\ l^2 < 2(n+1)^2 \end{array}\right.$$

Poniendo $n = 2n'$ y $l = 3l'$ (que tienen que ser enteros, por la primera ecuación anterior), resulta sustituyendo que

$$\left\{\begin{array}{c} n' = l' \\ n'^2 - 8n' - 2 < 0 \end{array}\right.$$

de modo que $1 \leq n' \leq 8$. Las posibles soluciones son, pues,

$$\left\{\begin{array}{lll} n' = l' = 1 & n = 2 & l = 3 \\ n' = l' = 2 & n = 4 & l = 6 \\ n' = l' = 3 & n = 6 & l = 9 \\ n' = l' = 4 & n = 8 & l = 12 \\ n' = l' = 5 & n = 10 & l = 15 \\ n' = l' = 6 & n = 12 & l = 18 \\ n' = l' = 7 & n = 14 & l = 21 \\ n' = l' = 8 & n = 16 & l = 24 \end{array}\right.$$

4. *Consideremos un alfabeto de n letras, con el que formaremos palabras. Diremos que una palabra contiene un palíndromo si un trozo de esa palabra, de más de una letra, se lee igual al derecho que al revés. Por ejemplo, la palabra OLIMPIADAS contiene el palíndromo ADA. Siendo k un entero mayor que 2, determina cuántas palabras de longitud k se pueden formar, con nuestro alfabeto de n letras, que no contengan ningún palíndromo de longitud impar.*

Solución. Observemos que una palabra contiene un palíndromo de longitud impar si y sólo si contiene un palíndromo de longitud 3. Por tanto, sólo hay que contar las palabras que no contengan un palíndromo de longitud 3.
Podemos enumerar todas las palabras pedidas, de la siguiente manera: para la primera letra tenemos n posibilidades. Para la segunda letra también tenemos n posibilidades. La tercera letra puede ser cualquiera menos la letra que está en la posición 1. Por tanto, para la tercera letra tenemos $n - 1$ posibilidades. La cuarta letra puede ser cualquiera menos la que está en la posición 2, por lo que tamibén tenemos $n - 1$ posibilidades. Así llegaremos hasta la k-ésima letra, que puede ser cualquiera menos la que está en la posición $k - 2$, y por tanto también hay $n - 1$ posibilidades. Por tanto, en total hay $n^2(n - 1)^{k-2}$ palabras que no contienen un palíndromo de longitud impar.

5. *Se ordenan los números naturales en forma de tabla triangular, es decir:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & 3 & 4 & & \\ & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{array}$$

$$\dots\dots\dots$$

Diremos que la posición de un número N en la tabla viene dada por dos "coordenadas": el primer número de su fila y el primer número de su columna. Por ejemplo, si $N = 15$, su posición es $(10, 9)$. Cuando un número N, en la posición (n, m), verifica que $N = n + m$ diremos que N está bien colocado *en la tabla; así 12 y 14 están bien colocados en la tabla y 15 no lo está. ¿Está 2^{2011} bien colocado?*

Solución. En cada fila hay dos números más que en la anterior: en la primera fila hay 1 número, en la segunda fila hay 3, en la tercera fila hay 5,así sucesivamente, en la n-ésima fila hay $2n - 1$ elementos. Por tanto, el último elemento de la fila n-ésima es: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, por la suma de los elementos de una progresión aritmética. El primer elemento de la fila $(n + 1)$-ésima es $n^2 + 1$ y el último $(n + 1)^2$.
Supongamos que N está bien colocado.

- Si N esté en la mitad derecha de la tabla triangular, incluida la "altura", su posición es $(m^2 + 1, n^2)$, luego $N = n^2 + m^2 + 1$. Tomando restos módulo 4, como $n^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$, $m^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$, se tiene que $N \equiv 1, 2, 3 \pmod 4$. Como $2^{2011} \equiv 0 \pmod 4$, se llega a una contradicción.

- Si N está en la mitad izquierda de la tabla, excluida la "altura", su posición es $(m^2 + 1, n^2 + 1)$, luego $N = n^2 + m^2 + 2$. Razonando como antes, solo en los casos de m y n impares puede conseguirse que $m^2 \equiv 1$, $n^2 \equiv 1$ y así $N \equiv 0$. En ese caso $m = 2p + 1$, $n = 2q + 1$, luego

  $$N = (2p + 1)^2 + (2q + 1)^2 + 2 = 4(p^2 + p + q^2 + q + 1)$$

  Si $N = 2^{2011}$, se tiene $2^{2009} = p^2 + p + q^2 + q + 1$. Como $p^2 + p$ y $q^2 + q$ son siempre números pares, encontramos una contradicción.

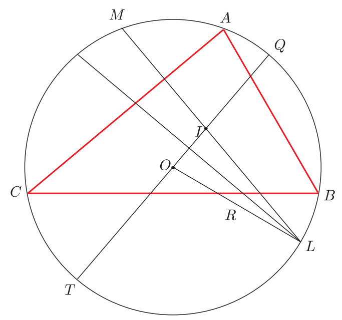
6. *En un triángulo llamaremos O al circuncentro, I al incentro y r al radio de la circunferencia inscrita. Si la mediatriz del segmento OI corta a la circunferencia circunscrita en L, y LI vuelve a cortarla en M, demuestra que $IM = 2r$.*

Solución. Por el Teorema de Euler, $(OI)^2 = R^2 - 2rR$. Sean T y Q los puntos de corte de la recta OI con la circunferencia circunscrita. Entonces tenemos

$$IL \cdot IM = IT \cdot IQ.$$

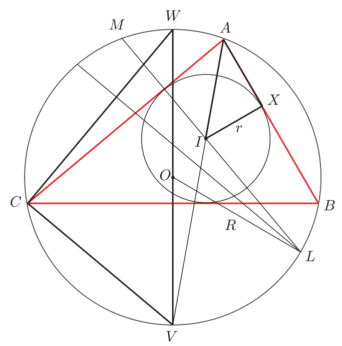
Por simetría, $IL = OL = R$. Por otra parte, $IT = OI + OT = OI + R$, y también tenemos $IQ = OQ - OI = R - OI$. Por tanto, sustituyendo en la ecuación anterior, se obtiene:

$$R \cdot IM = (R + OI)(R - OI) = R^2 - (OI)^2 = 2rR,$$



de donde $IM = 2r$.

Otra solución del Problema 6. Llamemos α, β y γ los ángulos del triángulo ABC.
Sea V el otro punto de corte de la recta AI con la circunferencia circunscrita. Considerando las cuerdas AV y LM, que se cortan en I, se tiene $AI \cdot IV = LI \cdot IM$. Como $LI = LO = R$ por simetría, esto significa que $AI \cdot IV = IM \cdot R$. Por tanto, probar que $IM = 2r$ es equivalente a probar que $AI \cdot IV = 2rR$. Tracemos el triángulo AIX, rectángulo en X, donde el ángulo en A es $\alpha/2$. Sea ahora W el punto diametralmente opuesto a V en la circunferencia circunscrita. Observemos que el triángulo WVC es rectángulo (al ser WV un diámetro de la circunferencia circunscrita, que contiene a C). Además al ser ángulos inscritos que determinan la misma cuerda, se tiene $\angle CWV = \angle CAV = \alpha/2$.
Por tanto, los triángulos rectángulos AIX y WVC son semejantes. Esto implica que $WV/VC = AI/IX$, esto es $2R/VC = AI/r$, de donde $2rR = AI \cdot VC$. Por tanto, debemos probar que $AI \cdot IV = AI \cdot VC$. Es decir, debemos probar que $IV = VC$.



Para ello consideremos el triángulo CVI. Su ángulo en C es igual a $\gamma/2 + \angle VCB = \gamma/2 + \angle VAB = \gamma/2 + \alpha/2$. Por otra parte, su ángulo en I es igual a $\angle CIV = 180° - \angle CIA = 180° - (180° - \alpha/2 - \gamma/2) = \alpha/2 + \gamma/2$. Este triángulo es pues isósceles, con lo que se tiene $VC = VI$, como queríamos demostrar.

Enunciados

1. *Sean* $n_1,\ n_2$ *dos números naturales. Demuestra que la suma* $\sqrt{n_1} + \sqrt[3]{n_2}$ *es un número entero o un número irracional.*

2. *Demuestra que en un triángulo se verifica: si* r *es una recta que pasa por su baricentro y no pasa por ningún vértice, la suma de las distancias a dicha recta de los vértices que quedan en un mismo semiplano es igual a la distancia del tercer vértice a dicha recta.*

3. *En un hexágono regular de lado unidad se sitúan* 19 *puntos. Demuestra que hay al menos un par de ellos separados por una distancia no mayor que* $\sqrt{3}/3$.

4. *Halla todas las ternas de números enteros positivos* $a \leq b \leq c$ *primitivas (es decir, que no tengan ningún factor primo común) tales que cada uno de ellos divide a la suma de los otros dos.*

5. *Halla todas las ternas* (x, y, z) *de números reales que son soluciones del sistema de ecuaciones*

$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot 2^y - 1 = 2^x + 2^{-x}, \\ 3 \cdot 2^z - 1 = 2^y + 2^{-y}, \\ 3 \cdot 2^x - 1 = 2^z + 2^{-z}. \end{array}\right\}$$

6. *En una reunión entre cuatro países de la ONU, digamos* A, B, C *y* D, *el país* A *tiene el doble de representantes que el* B, *el triple que el* C, *y el cuádruple que el* D. *Se pretende distribuir a los representantes en mesas con el mismo número de personas en cada una. Sólo hay una condición: en cada mesa, cualquiera de los países debe estar en inferioridad numérica respecto de los otros tres juntos. ¿Cuántos representantes debe haber en cada mesa, como mínimo?*

Soluciones

1. *Sean n_1, n_2 dos números naturales. Demuestra que la suma $\sqrt{n_1}+\sqrt[3]{n_2}$ es un número entero o un número irracional.*

Solución. Si se pone $x=\sqrt{n_1}+\sqrt[3]{n_2}$, se obtiene

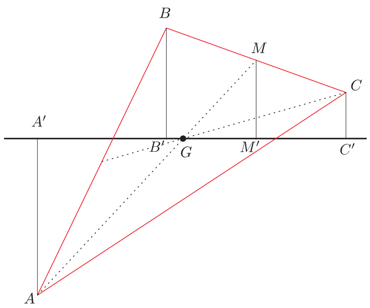
$x-\sqrt{n_1}=\sqrt[3]{n_2}\Longrightarrow n_2=(x-\sqrt{n_1})^3\Longrightarrow(3x^2+n_1)\sqrt{n_1}=x^3+3n_1x-n_2\Longrightarrow$

$(3x^2+n_1)^2\,n_1=(x^3+3n_1x-n_2)^2$ o $x^6-3n_1x^4-2n_2x^3+3n_1^2x^2-6n_1n_2x+n_2^2-n_1^3=0$

Esta ecuación tiene sólo soluciones enteras o irracionales por ser 1 el coeficiente principal.

2. *Demuestra que en un triángulo se verifica: si r es una recta que pasa por su baricentro y no pasa por ningún vértice, la suma de las distancias a dicha recta de los vértices que quedan en un mismo semiplano es igual a la distancia del tercer vértice a dicha recta.*

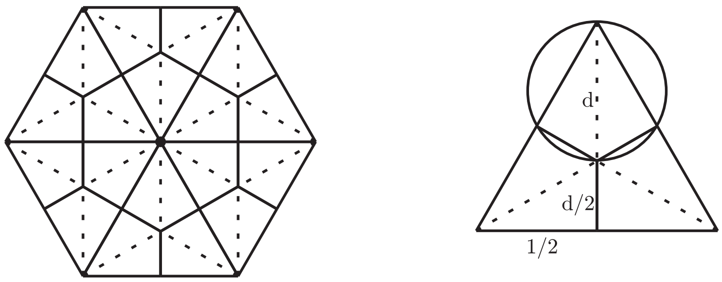
Solución. El triángulo GMM' es semejante a GAA' con razón de semejanza 2 (pues $AG=2GM$). Por tanto, $AA'=2MM'$. Por otro lado, MM' es la



paralela media del trapecio $BB'C'C$, de donde $MM'=(BB'+CC')/2$.
En consecuencia: $AA'=2MM'=BB'+CC'$.

3. *En un hexágono regular de lado unidad se sitúan 19 puntos. Demuestra que hay al menos un par de ellos separados por una distancia no mayor que $\sqrt{3}/3$.*

Solución. Dividamos el hexágono regular en 6 triángulos equiláteros iguales. Cada uno de ellos, si trazamos sus alturas, quedará dividido en 6 triángulos rectángulos. Uniendo estos triángulos rectángulos, dos a dos, por sus hipotenusas, habremos dividido el hexágono original en 18 regiones iguales.
Como tenemos 19 puntos, en alguna de estas regiones debe haber al menos 2 puntos. Para ver que estos dos puntos están como mucho a distancia $\sqrt{3}/3$,



sólo hay que probar que dicha región está inscrita en una circunferencia de diámetro $\sqrt{3}/3$.
Pero la circunferencia circunscrita a un triángulo rectángulo es la que tiene como diámetro la hipotenusa, por tanto, nuestra región está inscrita en una circunferencia de diámetro d, donde d es la hipotenusa de cualquiera de los dos triángulos rectángulos que la componen. Sólo hay que demostrar que $d \leq \sqrt{3}/3$. Para ello basta observar que la altura del triángulo equilátero de lado 1 es, por el teorema de Pitágoras, $\sqrt{1-1/4} = \sqrt{3}/2$, y de aquí se tiene, por cómo divide el baricentro a una mediana, $\sqrt{3}/2 = d + d/2$. De donde $d = \sqrt{3}/3$.

4. *Halla todas las ternas de números enteros positivos $a \leq b \leq c$ primitivas (es decir, que no tengan ningún factor primo común) tales que cada uno de ellos divide a la suma de los otros dos.*

Solución. Supongamos que $a = b$. Como a y b no tienen factores en común, debe ser $a = b = 1$. Como c divide a $a + b = 2$, esto da lugar a las ternas $(1, 1, 1)$ y $(1, 1, 2)$.
Supongamos ahora que $a < b$. Como c divide a $a + b < c + c = 2c$, debe ser $a + b = c$. Pero entonces, como b divide a $a + c = 2a + b$, se sigue que b divide a $2a$, y como b no tiene factores comunes con a, b divide a 2. b no puede ser 1 ya que es mayor que a, luego la única terna posible en este caso es $(1, 2, 3)$.

5. *Halla todas las ternas (x, y, z) de números reales que son soluciones del sistema de ecuaciones*

$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot 2^y - 1 = 2^x + 2^{-x}, \\ 3 \cdot 2^z - 1 = 2^y + 2^{-y}, \\ 3 \cdot 2^x - 1 = 2^z + 2^{-z}. \end{array}\right\}$$

Solución. Haciendo la sustitución $2^x = a, 2^y = b$, y $2^z = c$, se observa que $a, b, c > 0$ y se obtiene

$$\left.\begin{array}{r} b = \frac{1}{3}(a + 1 + \frac{1}{a}), \\ c = \frac{1}{3}(b + 1 + \frac{1}{b}), \\ a = \frac{1}{3}(c + 1 + \frac{1}{c}). \end{array}\right\}$$

Aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, resulta

$$b = \frac{1}{3}(a + 1 + \frac{1}{a}) \geq \sqrt[3]{a \cdot 1 \cdot \frac{1}{a}} = 1,$$

y por tanto $b \geq 1/b$. Análogamente, $a \geq 1$, $a \geq 1/a$, y $c \geq 1$, $c \geq 1/c$. Teniendo en cuenta lo anterior, de la primera ecuación resulta que

$$b = \frac{1}{3}(a + 1 + \frac{1}{a}) \leq \frac{1}{3}(a + a + a) = a$$

y de las otras dos que $c \leq b$ y $a \leq c$. Combinando las desigualdades anteriores, se obtiene $a \leq c \leq b \leq a$. Es decir, $a = b = c$.

Ahora tenemos

$$a = \frac{1}{3}(a + 1 + \frac{1}{a}) \Leftrightarrow 2a^2 - a - 1 = (a-1)(2a+1) = 0$$

que tiene por solución $a = 1$ y $a = -1/2$. Como sólo nos vale la solución positiva, tenemos que $a = b = c = 1$ y por tanto, $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ es la única terna solución del sistema.

Otra solución Problema 5. Haciendo la sustitución $2^x = a$, $2^y = b$, y $2^z = c$, se observa que $a, b, c > 0$, y se obtiene:

$$\left.\begin{array}{r} 3b - 1 = a + \frac{1}{a}, \\ 3c - 1 = b + \frac{1}{b}, \\ 3a - 1 = c + \frac{1}{c}. \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} a(3b-1) = a^2 + 1, \\ b(3c-1) = b^2 + 1, \\ c(3a-1) = c^2 + 1. \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 3ab = a^2 + a + 1, \\ 3bc = b^2 + b + 1, \\ 3ca = c^2 + c + 1. \end{array}\right\}$$

Observemos que como $a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0$, se tiene $a^2 + 1 \geq 2a$, luego la primera ecuación implica $3ab \geq 3a$, de donde $b \geq 1$. Análogamente, de las otras dos ecuaciones se tiene $c \geq 1$ y $a \geq 1$.
Supongamos que a es el menor de los tres valores a, b, c (los otros casos son análogos). En particular, $0 < a \leq b$. Entonces se tiene $a^2 + a + 1 = 3ab \geq 3a^2$, luego $2a^2 \leq a + 1$. La función $2x^2$ sólo puede ser menor o igual que la función $x + 1$ si $x \leq 1$. Por tanto $a \leq 1$, y así se tiene $a = 1$.
La primera ecuación queda entonces $3b = 3$, luego $b = 1$. Y de la segunda ecuación se sigue que $c = 1$. Por tanto, $2^x = 2^y = 2^z = 1$, y así la única terna posible es $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

6. *En una reunión entre cuatro países de la ONU, digamos A, B, C y D, el país A tiene el doble de representantes que el B, el triple que el C, y el cuádruple que el D. Se pretende distribuir a los representantes en mesas con el mismo número de personas en cada una. Sólo hay una condición: en cada mesa, cualquiera de los países debe estar en inferioridad numérica respecto de los otros tres juntos. ¿Cuántos representantes debe haber en cada mesa, como mínimo?*

Solución. La respuesta es 25. Veamos la demostración. Sean a, b, c y d el número de representantes de cada país. Como a debe ser múltiplo de 3 y de 4, también debe ser múltiplo de 12. Por tanto, existe un número k tal que $a = 12k$, luego $b = 6k$, $c = 4k$ y $d = 3k$. El número total de representantes es entonces $25k$.
Si llamamos M al número de mesas, y P al número de personas en cada mesa, tenemos $MP = 25k$.
Sea a_i el número de representantes del país A en la mesa número i. La condición impuesta nos dice que $a_i < \frac{P}{2}$, o bien $2a_i < P$. Como a_i es un

número entero, esto implica que $2a_i \leq P - 1$. Sumando todos los a_i, se obtiene:

$$24k = 2a = 2a_1 + \cdots + 2a_M \leq M(P - 1) = 25k - M.$$

De aquí se deduce $M \leq k$. Por tanto, como $MP = 25k$, deducimos finalmente que $P \geq 25$.

Sólo queda demostrar que, en efecto, se puede conseguir una configuración en la que haya 25 personas en cada mesa. Pero esto se consigue, por ejemplo, con una sola mesa en la que haya 12 representantes del país A, 6 del B, 4 del C y 3 del D.

Enunciados

1. *En un polígono regular de 67 lados trazamos todos los segmentos que unen dos vértices, incluidos los lados del polígono. Elegimos n de estos segmentos y asignamos a cada uno de ellos un color entre 10 colores posibles. Halla el valor mínimo de n que garantiza, que independientemente de cuáles sean los n segmentos elegidos y de cómo se haga la asignación de colores, siempre habrá un vértice del polígono que pertenece a 7 segmentos del mismo color.*

2. *Sean a, b, c números reales positivos. Demuestra que*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq\frac{5}{2}$$

¿Cuándo se alcanza la igualdad?

3. *Sean A, B, C, D cuatro puntos en el espacio, tales que no hay ningún plano que pasa por los cuatro a la vez. Los segmentos AB, BC, CD, DA son tangentes a una misma esfera. Demuestra que los cuatro puntos de tangencia están en un mismo plano.*

4. *Sea ABC un triángulo con $\angle B = 2\angle C$ y $\angle A > 90°$. Sean D el punto de la recta AB tal que CD es perpendicular a AC, y M el punto medio de BC. Demuestra que $\angle AMB = \angle DMC$.*

5. *Cada número racional se pinta de un color, usando sólo dos colores, blanco y rojo. Se dice que una tal coloración es sanferminera cuando para cada dos números racionales x, y, con $x \neq y$, si se cumple una de las tres condiciones siguientes:*

a) $xy = 1$,

b) $x + y = 0$,

c) $x + y = 1$.

entonces x e y están pintados de distinto color. ¿Cuántas coloraciones sanfermineras hay?

6. *Sea (S_n), con $n \geq 0$, la sucesión definida por:*

(i) $S_n = 1$ *para* $0 \leq n \leq 2011$.

(ii) $S_{n+2012} = S_{n+2011} + S_n$, *para* $n \geq 0$.

Prueba que, para todo entero no negativo a, se cumple que $S_{2011a} - S_a$ es múltiplo de 2011.

Soluciones

1. *En un polígono regular de 67 lados trazamos todos los segmentos que unen dos vértices, incluidos los lados del polígono. Elegimos n de estos segmentos y asignamos a cada uno de ellos un color entre 10 colores posibles. Halla el valor mínimo de n que garantiza, que independientemente de cuáles sean los n segmentos elegidos y de cómo se haga la asignación de colores, siempre habrá un vértice del polígono que pertenece a 7 segmentos del mismo color.*

Solución. Veamos en primer lugar que con $n = 2010$ no es suficiente. Diremos que un segmento es de *tamaño* r si une dos vértices entre los que, por el camino más corto siguiendo los lados del polígono, hay otros $r - 1$ vértices. Elegimos los 2010 segmentos de *tamaño* mayor que 3. Para cada $r \in \{1, 2, \dots, 10\}$, asignamos el color r a los segmentos de *tamaño* $3r + 1$, $3r + 2$ y $3r + 3$. Es obvio que cada vértice pertenece a 6 segmentos de cada color. Ahora vamos a probar que si $n = 2011$, hay algún vértice que está en 7 segmentos del mismo color. En efecto, en los 2011 segmentos intervienen, contando repeticiones, 4022 vértices, luego, por el principio del palomar, como $4022 > 60 \cdot 67$, algún vértice interviene en, al menos, 61 segmentos, de los cuales, de nuevo por el principio del palomar, al menos, 7 serán del mismo color.

2. *Sean a, b, c números reales positivos. Demuestra que*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{5}{2}$$

¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Solución. Nótese en primer lugar que, en virtud de la desigualdad entre medias aritmética y geométrica, se tiene

$$\frac{1}{2}\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\left(\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\right)^2} = \frac{3}{2},$$

dándose la igualdad si y sólo si $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca$, o equivalentemente, si y sólo si $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$, es decir, si y sólo si $a = b = c$. Nos bastaría entonces, para concluir el problema, con demostrar que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 1 + \frac{1}{2}\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

Esto puede conseguirse por fuerza bruta, viéndose en primer lugar que el miembro de la derecha puede escribirse como

$$\frac{a^3+b^3+c^3+abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} + 1,$$

y a partir de aquí comparando las fracciones restantes, llegándose a la conclusión tras algo de cálculo. Sin embargo, se puede obtener el resultado deseado de una forma más elegante, ya que podemos escribir

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ca}+\frac{b^2}{bc+ab}+\frac{c^2}{ca+bc}$$

$$=\left(\frac{a}{\sqrt{ab+ca}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{bc+ab}}\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{ca+bc}}\right)^2,$$

$$2(ab+bc+ca)=\left(\sqrt{ab+ca}\right)^2+\left(\sqrt{bc+ab}\right)^2+\left(\sqrt{ca+bc}\right)^2,$$

y por la desigualdad del producto escalar, se tendría

$$\sqrt{2(ab+bc+ca)}\sqrt{\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}}$$

$$\geq \frac{a}{\sqrt{ab+ca}}\sqrt{ab+ca}+\frac{b}{\sqrt{bc+ab}}\sqrt{bc+ab}+\frac{c}{\sqrt{ca+bc}}\sqrt{ca+bc}=a+b+c,$$

es decir,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}+1,$$

con lo que se concluye el problema. Nótese que la igualdad se da en la última desigualdad si y sólo si

$$\frac{\sqrt{ab+ca}}{a}\sqrt{ab+ca}=\frac{\sqrt{bc+ab}}{b}\sqrt{bc+ab}=\frac{\sqrt{ca+bc}}{c}\sqrt{ca+bc},$$

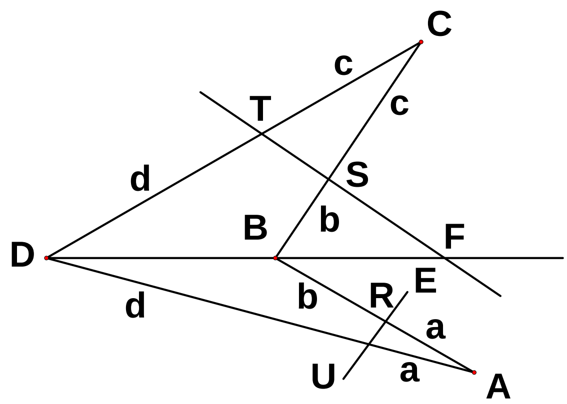
es decir, si y sólo si $a=b=c$, que es por lo tanto también la condición necesaria y suficiente para que se dé la igualdad en la desigualdad propuesta.

3. *Sean A,B,C,D cuatro puntos en el espacio, tales que no hay ningún plano que pasa por los cuatro a la vez. Los segmentos AB,BC,CD,DA son tangentes a una misma esfera. Demuestra que los cuatro puntos de tangencia están en un mismo plano.*

Solución. Sean R, S, T, U los puntos de tangencia respectivos de la esfera con los segmentos AB, BC, CD, DA. Siendo O el centro de la esfera, claramente OU, OR son respectivamente perpendiculares a DA, AB, con lo que los triángulos OAU y OAR son rectángulos respectivamente en U, R, y al ser $OU=OR$ el radio de la esfera, ambos triángulos son iguales, luego $AU=AR=a$, y de forma análoga,

$$BR=BS=b,\ CS=CT=c,\ \text{y}\ DT=DU=d$$

Las rectas UR y BD están en el plano del triángulo ABD, así o bien se cortan o son paralelas. Si UR y BD son paralelas, del teorema de Thales resulta $b=d$, y del recíproco de Thales resulta que también son paralelas TS y DB. Entonces, UR y TS son paralelas y los cuatro puntos están en un plano.



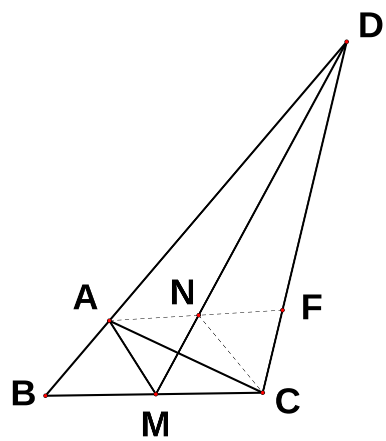
Si UR y BD no son paralelas, sea E su punto de intersección. Tampoco pueden entonces ser paralelas TS y DB, porque si lo fueran, lo serían UR y BD, en contra de lo supuesto. Sea entonces F el punto de intersección de TS y DB. Aplicando el teorema de Menelao en ABD cortado por UR, y en BCD cortado por TS, obtenemos

$$1 = \frac{BE}{ED}\frac{DU}{UA}\frac{AR}{RB} = \frac{BE}{ED}\frac{d}{b}, \quad 1 = \frac{BF}{FD}\frac{DT}{TC}\frac{CS}{SB} = \frac{BF}{FD}\frac{d}{b}, \quad \frac{BE}{ED} = \frac{BF}{FD}.$$

Entonces, E y F dividen a DB en la misma razón. Como ninguno de los dos puntos (E y F) puede estar entre D y B — pues BCD tendría tres puntos de intersección con ST — entonces E y F tienen que coincidir. Las rectas UR y ST se cortan entonces en $E = F$, luego están en un mismo plano y en él, en particular, están los puntos U, R, S y T.

4. *Sea ABC un triángulo con $\angle B = 2\angle C$ y $\angle A > 90°$. Sean D el punto de la recta AB tal que CD es perpendicular a AC, y M el punto medio de BC. Demuestra que $\angle AMB = \angle DMC$.*

Solución. La recta que pasa por A y es paralela a BC corta a DM y a DC en los puntos N y F respectivamente. Se sigue que $AN : BM = DN : DM = NF : MC$. Pues $BM = MC$, resulta $AN = NF$. Como $\angle ACF = 90°$,



tenemos $AN = NC$, de manera que $\angle NCA = \angle NAC = \angle ACB$. Así pues,

$\angle NCB = 2\angle ACB = \angle ABC$. Como $AN \parallel BC$, el cuadrilátero $ABCN$ es un trapecio isósceles con $AB = NC$. Por consiguiente, $\triangle ABM \equiv \triangle NCM$ y $\angle AMB = \angle NMC = \angle DMC$.

5. *Cada número racional se pinta de un color, usando sólo dos colores, blanco y rojo. Se dice que una tal coloración es sanferminera cuando para cada dos números racionales x, y, con $x \neq y$, si se cumple una de las tres condiciones siguientes:*

a) $xy = 1$,

b) $x + y = 0$,

c) $x + y = 1$.

entonces x e y están pintados de distinto color. ¿Cuántas coloraciones sanfermineras hay?

Solución. Si una coloración es *sanferminera*, podemos hallar otra coloración *sanferminera* intercambiando simultáneamente el color de cada racional, de rojo a blanco y de blanco a rojo; si en la coloración inicial dos racionales tienen distinto color, también lo tendrán en la resultante. Hallemos entonces el número de coloraciones *sanfermineras* tales que, sin pérdida de generalidad, el racional 1 está pintado de rojo, y el número total de coloraciones *sanfermineras* será exactamente el doble.
Supongamos entonces que tenemos una coloración *sanferminera* con el 1 pintado de rojo. Dado el color del racional $x > 0$, el color del racional $-x < 0$ tiene que ser distinto, pues $x + (-x) = 0$; al mismo tiempo, como 1 es rojo y $1 + 0 = 1$, necesariamente 0 es blanco. Luego fijado el color de cada racional positivo en una coloración *sanferminera*, quedaría fijado el color de todos los racionales. Al mismo tiempo, para cada racional positivo x, como $(x + 1) + (-x) = 1$, entonces $x + 1$ y $-x$ tienen color distinto, luego x y $x + 1$ tienen el mismo color. Por inducción sobre n, se comprueba entonces fácilmente que para cada racional positivo x y para cada entero positivo n, los racionales x y $n + x$ tienen el mismo color. En particular, todos los enteros positivos serán necesariamente de color rojo.
Coloreados entonces todos los enteros positivos de color rojo, procedemos ahora de la siguiente manera para los racionales positivos q que no tienen un color asociado todavía: expresamos $q = m + \frac{u}{v}$, donde m es la parte entera de q, y $u < v$ son enteros positivos primos entre sí; esta expresión es claramente única para cada racional positivo q, y para dos racionales positivos que difieran en un entero, los valores de u, v son claramente los mismos. Si $\frac{v}{u}$ tiene ya un color asociado, entonces le asociamos a q el color opuesto; si $\frac{v}{u}$ no tiene todavía color asociado, entonces procedemos de la misma forma con $\frac{v}{u}$, hasta llegar a un racional que sí tenga color asociado, pudiendo entonces asociarle un color a $\frac{v}{u}$, y asociándole a q el color opuesto; nótese que en cualquier caso x y $n + x$ tendrán el mismo color asociado. El proceso termina necesariamente, ya que expresando $q = \frac{v}{u} = m + \frac{u'}{v'}$, se tiene que $vv' = muv' + uu'$, luego al ser primos entre sí u, v, entonces u divide a v', y al ser primos entre sí u', v', entonces v' divide a u, luego $u = v' > u'$, y tras a lo sumo u pasos, llegaríamos a $u' = 0$, es decir, a un entero, que sí tiene asociado un color. Nótese además que el proceso es único ya que, en cada paso, los valores de m, u, v quedan unívocamente determinados por

el valor del racional positivo q, con lo que al ser todos los enteros positivos rojos, cada racional positivo podrá tener uno y sólo un color asociado. Esta coloración única para los racionales positivos se extiende también de forma única a todos los racionales, como ya hemos visto. Existe entonces a lo sumo una coloración *sanferminera* pintando el racional 1 de rojo.
Comprobemos que en efecto esta coloración única que hemos construido satisface las condiciones del enunciado:

1) Si $x + y = 0$ con $x \neq y$, sin pérdida de generalidad $x > 0 > y = -x$, luego y tiene, por la forma de extender la coloración a todos los racionales, color distinto al de x.

2) Si $xy = 1$ con $x \neq y$, o ambos son positivos, o ambos son negativos, teniendo en el segundo caso x, y colores respectivamente opuestos a los de $-x, -y$, que serían positivos, reduciéndose la comprobación al primer caso. Si x, y son ambos positivos, sin pérdida de generalidad $x > 1 > y$, con $y = 0 + \frac{u}{v}$ para enteros positivos $u < v$, y por construcción a y se le asigna color opuesto al de $x = \frac{v}{u}$.

3) Si $x+y = 1$ con $x \neq y$, entonces sin pérdida de generalidad $x > y$, y bien $x = 1$ es rojo, $y = 0$ es blanco, bien $x > 1 > 0 > y$, bien $1 > x > y > 0$. En el segundo caso, el racional positivo $x - 1$ tiene por construcción el mismo color que x, luego por 1), x tiene color opuesto a $1 - x = y$. En el tercer caso, existen enteros positivos $u < v$ primos entre sí tales que $x = \frac{v}{u+v}$, $y = \frac{u}{u+v}$. Por construcción y por 2), x tiene color opuesto al de $\frac{u+v}{v} = 1 + \frac{u}{v}$, luego x tiene el mismo color que $\frac{v}{u}$. Pero también por construcción y por 2), y tiene color opuesto al de $\frac{u+v}{u} = 1 + \frac{v}{u}$, luego opuesto al de $\frac{v}{u}$, y opuesto al de x.

Luego la coloración construida es *sanferminera*, y es la única que puede ser *sanferminera* con el racional 1 pintado de rojo. Restaurando la generalidad, hay exactamente dos coloraciones *sanfermineras*.

6. *Sea (S_n), con $n \geq 0$, la sucesión definida por:*

(i) $S_n = 1$ *para* $0 \leq n \leq 2011$.

(ii) $S_{n+2012} = S_{n+2011} + S_n$, *para* $n \geq 0$.

Prueba que, para todo entero no negativo a, se cumple que $S_{2011a} - S_a$ es múltiplo de 2011.

Solución. Sea $p = 2011$. Observemos que p es primo. Sea A_n el número de formas de cubrir un tablero de [n filas] $\times$ [$(p + 1)$ columnas] con fichas de dimensiones $1 \times (p + 1)$ (que podemos colocar horizontal o verticalmente). Probemos primero que $A_n = S_n$. En efecto, tenemos que:

- para $1 \leq n \leq p$, $A_n = 1 = S_n$.
- $A_{p+1} = 2 = S_{p+1}$.
- para $n \geq 0$, $A_{n+p+1} = A_{n+p} + A_n$; en efecto, al cubrir un tablero de [$(n + p + 1)$ filas] $\times$ [$(p + 1)$ columnas] con fichas de $1 \times (p + 1)$, se da uno de los dos casos siguientes:

* o bien la última fila, de $(p+1)$ casillas, está cubierta por una ficha colocada horizontalmente: en este caso, hay A_{n+p} formas de cubrir el tablero.
* o bien las $(p+1)$ últimas filas, cada una de $(p+1)$ casillas, están cubiertas por $(p+1)$ fichas en posición vertical: en este caso, hay A_n formas de cubrir el tablero.

Deducimos que, para $n > 0$, $A_n = S_n$. Hallemos ahora una expresión de A_n en función de n. Escribamos la división euclídea de n por $(p+1)$: $n = q(p+1) + r$. Observemos que, al cubrir el tablero, se pueden juntar las fichas colocadas en posición vertical para formar cuadrados de $(p+1)\times(p+1)$: Llamemos *bloques* a estos cuadrados. Sea A_n^k el número de formas de cubrir el tablero con k bloques, para $0 \leq k \leq q$. Dada una de estas formas de cubrir el tablero, llamemos $B_1, \ldots, B_k$ a los bloques ordenados de arriba hacia abajo, y sean a_0 el número de filas situadas encima de B_1, a_1 el número de filas entre B_1 y B_2, a_2 el número de filas entre B_2 y B_3,..., a_k el número de filas debajo de B_k. Por ejemplo, en el dibujo anterior, $k = 2, a_0 = 5, a_1 = 3, a_2 = 0$. Entonces se tiene que $a_0 + \cdots + a_k = n - (p+1)k$.
Recíprocamente, a una $(k+1)-$upla de enteros no negativos $(a_0, \ldots, a_k)$ tal que $a_0 + \cdots + a_k = n-(p+1)k$, le podemos asociar una única forma de cubrir el tablero con k bloques, colocando de forma alternada y de arriba hacia abajo a_0 fichas horizontales, un bloque, a_1 fichas horizontales, un bloque,..., a_{k-1} fichas horizontales, un bloque, a_k fichas horizontales.
Por tanto, A_n^k es el número de $(k+1)-$uplas de enteros no negativos $(a_0, \ldots, a_k)$ tales que $a_0 + \cdots + a_k = n - (p+1)k$, luego $A_n^k = \binom{n-pk}{k}$.
Deducimos que $S_n = A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{n-pk}{k}$. Estudiemos finalmente $S_{pc} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{pc}{p+1} \right\rfloor} \binom{p(c-k)}{k} \pmod p$. Para ello, utilizamos el lema siguiente:

Lema. *Para todo primo p y enteros a y b, se tiene*

(i) $\dbinom{pa}{pb} \equiv \dbinom{a}{b} \pmod p$.

(ii) Si p no divide a b, entonces p divide a $\binom{pa}{b}$.

Si admitimos el lema,

$$S_{pc} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{pc}{p+1} \right\rfloor} \binom{p(c-k)}{k} \equiv \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{1}{p}\left\lfloor \frac{pc}{p+1} \right\rfloor \right\rfloor} \binom{c-pk}{k} \equiv k = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{c}{p+1} \right\rfloor} \binom{c-pk}{k} \equiv S_c \pmod p,$$

que es lo que queríamos probar.

Demostración del lema. (i)

$$\binom{pa}{pb} = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{a-1} (pk+1)\ldots(pk+p-1)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{b-1} (pk+1)\ldots(pk+p-1) \prod_{k=0}^{a-b-1} (pk+1)\ldots(pk+p-1)} \cdot \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{a} (pk)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{b} (pk) \prod_{k=1}^{a-b} (pk)}$$

$$\equiv \frac{((p-1)!)^a}{((p-1)!)^b\,((p-1)!)^{a-b}} \cdot \binom{a}{b} \equiv \binom{a}{b} \pmod p$$

(ii) Si n es el cociente de b dividido por p,

$$v_p\left(\binom{a}{b}\right) = \sum_{k=n+1}^{a} v_p(pk) - \sum_{k=1}^{a-n-1} v_p(pk) = \sum_{k=n+2}^{a} v_p(pk) - \sum_{k=1}^{a-n-1} v_p(pk) + v_p(pa) > 0$$

puesto que $\sum_{k=n+2}^{a} v_p(pk) - \sum_{k=1}^{a-n-1} v_p(pk) \geq 0$.

Problems

1. *A Mediterranean polynomial is polynomial with real coefficients having only real zeros of the form*

$$M(x) = x^{10} - 20x^9 + 135x^8 + \sum_{k=0}^{7} a_k x^k$$

Find the largest real number that occurs as a zero of some Mediterranean polynomial.

2. *Let A be a finite set of positive reals numbers, let $B = \{x/y \mid x, y \in A\}$ and let $C = \{xy \mid x, y \in A\}$. If we denote by $card(X) = |X|$, then show that $|A| \cdot |B| \leq |C|^2$.*

3. *From a regular tetrahedrom $ABCO$ of altitude h a tetrahedorm of antitude xh is cutt off by a plane DEF parallel to its base. The remaining frustrum is placed on one of its slant faces on a hori- zontal plane. The frustrum is unstable and ready to falling over. Prove that*

$$x^3 + x^2 + x = 2$$

4. *Let D be the foot of the internal bisector of $\angle A$ of triangle ABC. The straight line joining the incenters of triangles ABC and ACD cuts AB and AC at M and N, respectively. Show that BN and CB meet on the bisector AD.*

Solutions

1. *A Mediterranean polynomial is polynomial with real coefficients having only real zeros of the form*

$$M(x) = x^{10} - 20x^9 + 135x^8 + \sum_{k=0}^{7} a_k x^k$$

Find the largest real number that occurs as a zero of some Mediterranean polynomial.

Solution. Suppose that the zeros of a given Mediterranean polynomial are α, $x_1, x_2, \ldots, x_9$, respectively. Let us denote by

$$s = \sum_{i=1}^{9} x_i, \quad t = \sum_{i=1}^{9} x_i^2, \text{ and } u = \sum_{1\le i<j\le 9} x_i x_j$$

On account of Viète formulae, we have $s = 20 - \alpha$, $u = 135 - s\alpha = 135 - 20\alpha + \alpha^2$. Moreover, $t = s^2 - 2u = 130 - \alpha^2$. On the other hand, we have

$$0 \le \sum_{1\le i<j\le 9} (x_i - x_j)^2 = 8t - 2u = 10(\alpha + 7)(11 - \alpha)$$

from which follows $\alpha \le 11$. Since polynomial

$$M(x) \;=\; (x-11)(x-1)^9 = x^{10} - 20x^9 + 135x^8 + \sum_{k=0}^{7} a_k x^k$$

$$= x^{10} - 20x^9 + 135x^8 - 480x^7 + 1050x^6 - 1512x^5 + 1470x^4 - 960x^3 + 405x^2 - 100x + 11$$

is a Mediterranean polynomial one of which zeros is $\alpha = 11$, then 11 is the number required and we are done.

2. *Let A be a finite set of positive reals numbers, let $B = \{x/y \mid x, y \in A\}$ and let $C = \{xy \mid x, y \in A\}$. If we denote by $card(X) = |X|$, then show that $|A| \cdot |B| \le |C|^2$.*

Solution. For $b \in B$, let $b = x(b)/y(b)$, ($x(b), y(b) \in A$) be the representation of b for which $x(b)$ is smallest. Now consider the function $f : A \times B \to C \times C$ defined for any $(a, b) \in A \times B$ by

$$f(a, b) = \Big(a \cdot x(b), a \cdot y(b)\Big)$$

We claim that f is injective. Indeed, let (a_1, b_1) and (a_2, b_2) be two elements of $A \times B$ such that $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$. Then

$$a_1 \cdot x(b_1) = a_2 \cdot x(b_2) \quad \text{and} \quad a_1 \cdot y(b_1) = a_2 \cdot y(b_2)$$

from which follows after division that $\dfrac{x(b_1)}{y(b_1)} = \dfrac{x(b_2)}{y(b_2)}$, and so $b_1 = b_2$. Then, we have $a_1 \cdot x(b_1) = a_2 \cdot x(b_2)$ and $a_1 = a_2$. Hence $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$. That is, f is injective as claimed. From the injectivity of f immediately follows the inequality proposed in the statement.

3. *From a regular tetrahedrom $ABCO$ of altitude h a tetrahedrom of altitude xh is cut off by a plane DEF parallel to its base. The remaining frustrum is placed on one of its slant faces on a horizontal plane. The frustrum is unstable and ready to falling over. Prove that*

$$x^3 + x^2 + x = 2$$

Solution. First, it is convenient to interpret *mathematically* the last two sentences of the statement. Namely, *The remaining frustrum is placed on one of its slant faces on a horizontal plane. The frustrum is unstable and ready to falling over.* With the notations of Figure 1, if the slanted face $ADEB$ (a

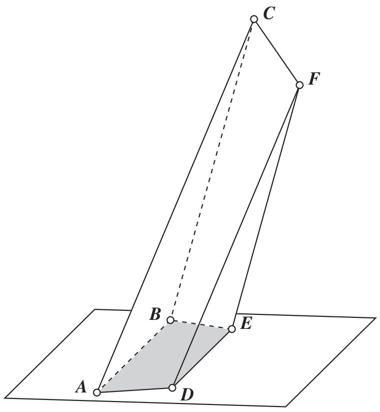


Figure 1: Mathematical interpretation.

trapeze which major base is AB), and if G is the centroid of the frustrum, a reasonable interpretation is that the projection H of the point G over the plane ABO lie on the segment DE. This interpretation was included in the statement given to the contestants in the *Mediterranean Mathematical Competition.*

Adding points G and H to Figure 1, completing the tetrahedrom and drawing the centers P and P' of the faces ABC and DEF; the centroids G_1 and G_2 of $OABC$ and $ODEF$, respectively; we get Figure 2.
Since the volumes of the two tetrahedroms are proportional to the cubes of the altitudes $OP = h$ and $OP' = xh$, then

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{h^3(1 - x^3)\overrightarrow{OG} + h^3x^3\overrightarrow{OG_2}}{h^3}$$

on account of baricentric calculus. From the preceding, we get

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OG_1} - x^3\overrightarrow{OG_2}}{1 - x^3}$$

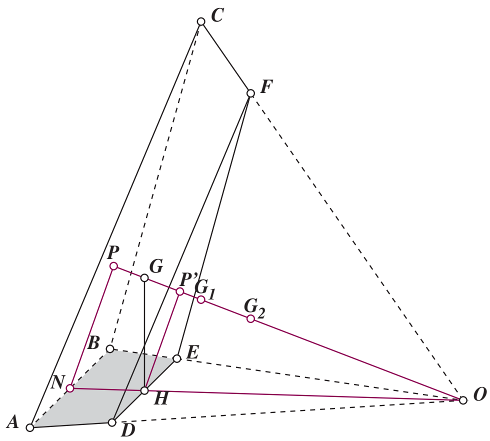


Figure 2: Complete figure.

Distances OG_1 and OG_2 are given by

$$OG_1 = \frac{3}{4}OP = \frac{3}{4}h \quad \text{and} \quad OG_2 = \frac{3}{4}OP' = \frac{3}{4}xh$$

(This result is attributed to Federico Commandino (1506-1575) an Italian mathematician known for his translations of Greeks mathematicians).

From the preceding we obtain

$$OG = \frac{\frac{3}{4}h - \frac{3}{4}x^4h}{1-x^3} = \frac{3}{4}h\frac{(1+x)(1+x^2)}{1+x+x^2}$$

from which follows

$$P'G = OG - OP' = \frac{3-x-x^2-x^3}{4(1+x+x^2)}h$$

Now, we present another way to obtain expression $P'G$ (see Figure 2). Let N be the orthogonal projection of P on AB. Then ON meets DE in H GH is perpendicular to plane AOB. Applying the altitude theorem to the right triangle GHO after computing the altitudes NP and HP' in the similar triangles PNO and $P'HO$.

Since we know the length of the edges of tetrahedrom $OABC$ with altitude h, then

$$OA = h\sqrt{\frac{3}{2}}$$

and

$$PN^2 = ON^2 - OP^2 = \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)OA^2 = \frac{1}{8}h^2$$

So,

$$PN = \frac{1}{2\sqrt{2}}h \quad \text{and} \quad P'H = \frac{1}{2\sqrt{2}}xh$$

Using the altitude theorem again, we have

$$P'H^2 = P'G \cdot P'O$$

from which follows

$$P'G = \frac{x^2h^2}{8xh} = \frac{xh}{8}$$

Finally, equating both expressions of $P'G$ we get

$$\frac{3 - x - x^2 - x^3}{4(1 + x + x^2)}h = \frac{xh}{8} \implies x + x^2 + x^3 = 2$$

This equation only have one real root which approximate value is $0,81054$.

4. *Let D be the foot of the internal bisector of $\angle A$ of triangle ABC. The straight line joining the incenters of triangles ABC and ACD cuts AB and AC at M and N, respectively. Show that BN and CB meet on the bisector AD.*

Solution. Let I_1, I_2 be the incenters of $\triangle ABD$ and $\triangle ACD$ respectively, and let $Q = I_1I_2 \cap AD$. Since I_1 lies on MQ, applying the theorem of transversals yields

$$\frac{MB}{MA} \cdot AD + \frac{QD}{QA} \cdot c = BD$$

Since I_2 lies on QN, applying the theorem of transversals again, yields

$$\frac{QD}{QA} \cdot b + \frac{NC}{NA} \cdot AD = DC$$

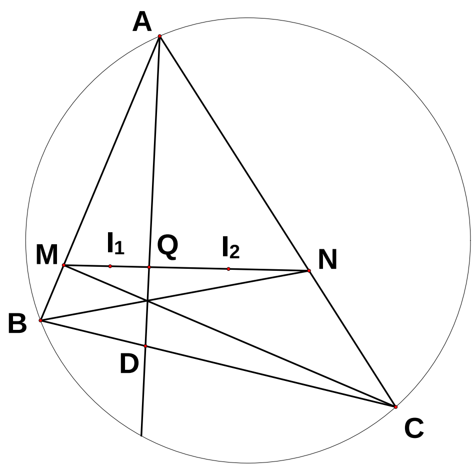
Dividing the first one by c and the second one by b, we obtain

$$\frac{MB}{MA} \cdot \frac{AD}{c} + \frac{QD}{QA} = \frac{BD}{c}$$

and

$$\frac{NC}{NA} \cdot \frac{AD}{b} + \frac{QD}{QA} = \frac{DC}{b}$$

Subtracting and taking into account the internal bisector theorem yields



$$\frac{MB}{MA} \cdot \frac{AD}{c} - \frac{NC}{NA} \cdot \frac{AD}{b} = 0 \Leftrightarrow \frac{MB}{MA} \cdot \frac{AD}{c} = \frac{NC}{NA} \cdot \frac{AD}{b}$$

The last equality can be written as

$$\frac{MB}{MA} \cdot \frac{2bc}{c(b+c)} \sin\frac{A}{2} = \frac{NC}{NA} \cdot \frac{2bc}{b(b+c)} \sin\frac{A}{2}$$

or

$$\frac{MB}{MA} \cdot b = \frac{NC}{NA} \cdot c \tag{1}$$

To see that BN and CM meet on the internal bisector it will be suffice to verify that

$$\frac{BM}{MA} \cdot \frac{NA}{NC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1,$$

which it is indeed the case by (**??**) and the internal bisector theorem. So, the converse of Ceva's theorem finish the job.

Problems

1. *Find all functions $f : \mathbb{N} \to [0, +\infty)$ such that $f(1000) = 10$ and*

$$f(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{f^2(k) + f(k)f(k+1) + f^2(k+1)}$$

for all integer $n \geq 0$. (Here, $f^2(i)$ means $(f(i))^2$.)

2. *Let $ABDC$ be a cyclic quadrilateral inscribed in a circle $\mathcal{C}$. Let M and N be the midpoints of the arcs AB and CD which do not contain C and A respectively. If MN meets side AB at P, then show that*

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AC + AD}{BC + BD}$$

3. *Place n points on a circle and draw in all possible chord joining these points. If no three chord are concurrent, find (with proof) the number of disjoint regions created.*

4. *Inscribed circle of triangle ABC touches sides BC, CA, AB at the points X, Y, Z, respectively. Let AA', BB', CC' be the altitudes of triangle ABC and M, N, P be the incenters of triangles $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$, respectively.*

a) Prove that M, N, P are orthocenters of triangles AYZ, BZX, CXY, respectively.

b) Prove that common external tangents of these incircles, different from triangle sides, are concurrent at orthocenter of triangle XYZ.

5. *Solve in the set of integers the following equation* $x^5 + y^5 + z^5 + t^5 = 93.$

6. *Let $a, b, c \in (0, +\infty)$ such that $a + b + c = 1$. Prove that*

$$\frac{a}{a^3 + b^2c + c^2b} + \frac{b}{b^3 + c^2a + a^2c} + \frac{c}{c^3 + a^2b + b^2a} \leq 1 + \frac{8}{27abc}$$

Solutions

1. *Find all functions $f : \mathbb{N} \to [0, +\infty)$ such that $f(1000) = 10$ and*

$$f(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{f^2(k) + f(k)f(k+1) + f^2(k+1)}$$

for all integer $n \geq 0$. (Here, $f^2(i)$ means $(f(i))^2$.)

Solution. We have

$$\begin{aligned} f(n+1) - f(n) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{f^2(k) + f(k)f(k+1) + f^2(k+1)} \\ &- \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{f^2(k) + f(k)f(k+1) + f^2(k+1)} \\ &= \frac{1}{f^2(n) + f(n)f(n+1) + f^2(n+1)} \end{aligned}$$

Rearranging terms, we get $f^3(n+1) - f^3(n) = 1$ from which follows

$$f^3(n+1) = 1 + f^3(n) = 2 + f^3(n-1) = \ldots = (n+1) + f^3(0)$$

Putting $n = 999$, we get $f^3(1000) = 1000 + f^3(0)$ from which follows $f^3(0) = 0$ and $f(0) = 0$. So, $f^3(n+1) = n+1$ and $f(n) = \sqrt[3]{n}$.

2. *Let $ABDC$ be a cyclic quadrilateral inscribed in a circle $\mathcal{C}$. Let M and N be the midpoints of the arcs AB and CD which do not contain C and A respectively. If MN meets side AB at P, then show that*

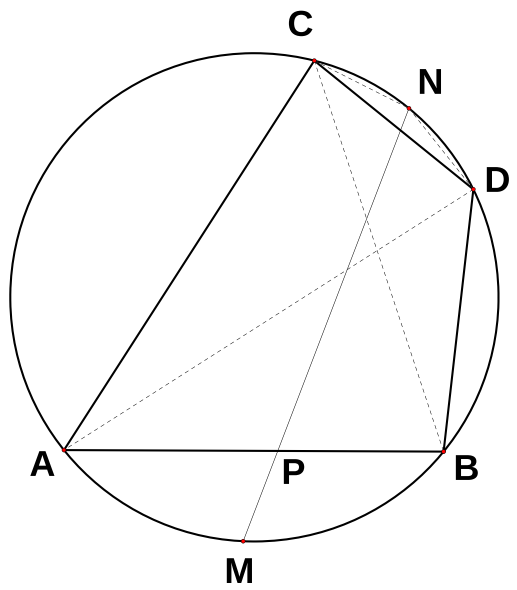
$$\frac{AP}{BP} = \frac{AC + AD}{BC + BD}$$

Solution. Applying Ptolemy's theorem to the inscribed quadrilateral $ACND$, we have

$$AD \cdot CN + AC \cdot ND = AN \cdot CD$$

Since N is the midpoint of the arc CD, then we have $CN = ND = x$, and $AN \cdot CD = (AC + AD)x$. Likewise, considering the inscribed quadrilateral $CNDB$ we have $BN \cdot CD = (BD + BC)x$. Dividing the preceding expressions, yields

$$\frac{AN}{BN} = \frac{AC + AD}{BD + BC}$$



Applying the bisector angle theorem, we have

$$\frac{AN}{BN} = \frac{AP}{BP}$$

This completes the proof.

3. *Place n points on a circle and draw in all possible chord joining these points. If no three chord are concurrent, find (with proof) the number of disjoint regions created.*

Solution. First, we prove that if a convex region crossed by L lines with P interior points of intersection, then the number of disjoint regions created is $R_L = L + P + 1$. To prove the preceding claim, we argue by Mathematical Induction on L. Let $\mathcal{R}$ be an arbitrary convex region in the plane. For each $L \geq 0$, let $A(L)$ be the statement that for each $P \in \left\{1, 2, \ldots, \binom{L}{2}\right\}$, if L lines that cross $\mathcal{R}$, with P intersection points inside $\mathcal{R}$, then the number of disjoint regions created inside $\mathcal{R}$ is $R_L = L + P + 1$.

When no lines intersect $\mathcal{R}$, then $P = 0$, and so, $R_0 = 0 + 0 + 1 = 1$ and $A(0)$ holds. Fix some $K \geq 0$ and suppose that $A(K)$ holds for K lines and some $P \geq 0$ with $R_K = K + P + 1$ regions. Consider a collection $\mathcal{C}$ of $K + 1$ lines each crossing $\mathcal{R}$ (not just touching), choose some line $\ell \in \mathcal{C}$, and apply $A(K)$ to $\mathcal{C} \backslash \{\ell\}$ with some P intersection points inside $\mathcal{R}$ and $R_K = K + P + 1$ regions. Let S be the number of lines intersecting ℓ inside $\mathcal{R}$. Since one draws a $(K + 1)-$st line ℓ, starting outside $\mathcal{R}$, a new region is created when ℓ first crosses the border of $\mathcal{R}$, and whenever ℓ crosses a line inside of $\mathcal{R}$. Hence the number of new regions is $S + 1$. Hence, the number of regions determined by the $K + 1$ lines is, on account of $A(K)$,

$$R_{K+1} = R_K + S + 1 = (K + P + 1) + S + 1 = (K + 1) + (P + S) + 1,$$

where $P + S$ is the total number of intersection points inside $\mathcal{R}$. Therefore, $A(K + 1)$ holds and by the PMI the claim is proven.

Finally, since the circle is convex and any intersection point is determined by a unique 4−tuple of points, then there are $P = \binom{n}{4}$ intersection points and $L = \binom{n}{2}$ chords and the number of regions is $\mathcal{R} = \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1$.

4. *Inscribed circle of triangle ABC touches sides BC, CA, AB at the points X, Y, Z, respectively. Let AA', BB', CC' be the altitudes of triangle ABC and M, N, P be the incenters of triangles $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$, respectively.*

a) *Prove that M, N, P are orthocenters of triangles AYZ, BZX, CXY, respectively.*

b) *Prove that common external tangents of these incircles, different from triangle sides, are concurrent at orthocenter of triangle XYZ.*

Solution.

a) Since triangles $AB'C'$ and ACB are similar, we get $\dfrac{AM}{AI} = \dfrac{B'C'}{BC} = \cos\widehat{A}$, where I is the incenter of ABC. AI is a diameter of circumcircle of isosceles triangle AYZ, so it contains its orthocenter, meaning that M is the orthocenter of triangle $AB'C'$ because it is easy to see that for orthocenter above relation is true. The same argument holds for N and P and orthocenters of $BC'A'$ and $CA'B$, which finishes part a).

b) From a) we get that M, N, P and I are symmetric with respect to the sides YZ, ZX, XY. Denote by H an orthocenter of triangle XYZ. From everything above we conclude that M, N, P are circumcenters of triangles HYZ, HZX, HXY, respectively. Thus, the sides of triangle MNP are medians of HX, HY, HZ. Since X, Y, Z lie on the sides of triangle which are common external tangents of corresponding circles, other external tangents really contain point H.

5. *Solve in the set of integers the following equation* $x^5 + y^5 + z^5 + t^5 = 93$.

Solution. First, we observe that if $x \in \mathbb{Z}$, then $x^5 \equiv r(\bmod 11)$ where $r \in \{-1, 0, 1\}$. So, $x^5+y^5+z^5+t^5 \equiv r \ (\bmod 11)$ if $x, y, z, t \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Note that $93 \equiv 5 \, (\bmod 11)$. Then, it follows that the given equation does not have integer solutions.

6. *Let $a, b, c \in (0, +\infty)$ such that $a + b + c = 1$. Prove that*

$$\frac{a}{a^3 + b^2c + c^2b} + \frac{b}{b^3 + c^2a + a^2c} + \frac{c}{c^3 + a^2b + b^2a} \leq 1 + \frac{8}{27abc}$$

Solution. To prove the the inequality claimed, we will apply CBS inequality. Indeed, we have

$$\left(\sum_{cyc} a\right)^2 = \left(\sum_{cyc} \sqrt{x}\sqrt{\frac{a^2}{x}}\right)^2 \leq \left(\sum_{cyc} x\right)\left(\sum_{cyc} \frac{a^2}{x}\right)$$

Writing the preceding in the most convenient form

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{x} \geq \left(\sum_{cyc} a\right)^2 \bigg/ \left(\sum_{cyc} x\right)$$

we have

$$a^3 + b^2c + c^2b = \frac{a^2}{\frac{1}{a}} + \frac{b^2}{\frac{1}{c}} + \frac{c^2}{\frac{1}{b}} \geq \left(\sum_{cyc} a\right)^2 \bigg/ \left(\sum_{cyc} \frac{1}{a}\right)$$

from which immediately follows

$$\frac{a}{a^3 + b^2c + c^2b} = a \sum_{cyc} \frac{1}{a} \bigg/ \left(\sum_{cyc} a\right)^2$$

So, on account of the preceding and the constrain, we have

$$\frac{a}{a^3 + b^2c + c^2b} + \frac{b}{b^3 + c^2a + a^2c} + \frac{c}{c^3 + a^2b + b^2a} \leq \left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} \frac{1}{a}\right) \bigg/ \left(\sum_{cyc} a\right)^2$$

$$= \left(\sum_{cyc} \frac{1}{a}\right) \bigg/ \left(\sum_{cyc} a\right) = \sum_{cyc} \frac{1}{a} = \frac{ab + bc + ca}{abc}$$

Now, applying Jensen's inequality to the convex function $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ defined by $f(t) = t^3$, we get $9(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)^3$. Taking into account the well-known identity

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= (a + b + c)[(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)] + 3abc \\ &= (a + b + c)[(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)] + 3abc \end{aligned}$$

and again, on account of the constrain, we have

$$a^3 + b^3 + c^3 = 1 - 3(ab + bc + ca)] + 3abc;$$

and $9(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)^3$ becomes $27(abc - (ab + bc + ca)) + 8 \geq 0$ from which follows $ab + bc + ca \leq \frac{8}{27} + abc$. Finally, we have

$$\frac{a}{a^3 + b^2c + c^2b} + \frac{b}{b^3 + c^2a + a^2c} + \frac{c}{c^3 + a^2b + b^2a} \leq \frac{ab + bc + ca}{abc} \leq 1 + \frac{8}{27abc}$$

Equality holds when $a = b = c = 1/3$ and we are done.

Enunciados

1. *Para cualquier conjunto* $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ *de cuatro enteros positivos distintos se denota la suma* $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ *por* s_A. *Sea* n_A *el número de parejas* (i, j) *con* $1 \leq i < j \leq 4$ *para las cuales* $a_i + a_j$ *divide a* s_A. *Encontrar todos los conjuntos* A *de cuatro enteros positivos distintos para los cuales se alcanza el mayor valor posible de* n_A.

2. *Sea* $\mathcal{S}$ *un conjunto finito de dos o más puntos del plano. En* $\mathcal{S}$ *no hay tres puntos colineales. Un remolino es un proceso que empieza con una recta* ℓ *que pasa por un único punto* P *de* $\mathcal{S}$. *Se rota* ℓ *en el sentido de las manecillas del reloj con centro en* P *hasta que la recta encuentre por primera vez otro punto de* $\mathcal{S}$ *al cual llamaremos* Q. *Con* Q *como nuevo centro se sigue rotando la recta en el sentido de las manecillas del reloj hasta que la recta encuentre otro punto de* $\mathcal{S}$. *Este proceso continúa indefinidamente.*
Demostrar que se puede elegir un punto P *de* $\mathcal{S}$ *y una recta* ℓ *que pasa por* P *tales que el remolino que resulta usa cada punto de* $\mathcal{S}$ *como centro de rotación un número infinito de veces.*

3. *Sea* f *una función del conjunto de los números reales en si mismo que satisface*

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

para todo par de números reales x, y. *Demostrar que* $f(x) = 0$ *para toda* $x \leq 0$.

4. *Sea* $n > 0$ *un entero. Se dispone de una balanza de dos platillos y de* n *pesas cuyos pesos son* $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. *Debemos colocar cada una de las* n *pesas en la balanza, una tras otra, de manera tal que el platillo de la derecha nunca sea más pesado que el platillo de la izquierda. En cada paso, elegimos una de las pesas que no haya sido colocada en la balanza, y la colocamos ya sea en el platillo de la izquierda o en el platillo de la derecha, hasta que todas las pesas hayan sido colocadas. Determinar el número de formas en las que esto se puede hacer.*

5. *Sea* f *una función del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros positivos. Se supone que para cualesquiera dos enteros* m *y* n, *la diferencia* $f(m) - f(n)$ *es divisible por* $f(m-n)$. *Demostrar que para todos los enteros* m *y* n *con* $f(m) \leq f(n)$, *el número* $f(n)$ *es divisible por* $f(m)$.

6. *Sea* ABC *un triángulo acutángulo cuya circunferencia circunscrita es* Γ. *Sea* ℓ *una recta tangente a* Γ, *y sean* ℓ_a, ℓ_b *y* ℓ_c *las rectas que se obtienen al reflejar* ℓ *con respecto a las rectas* BC, CA *y* AB, *respectivamente. Demostrar que la circunferencia circunscrita del triángulo determinado por las rectas* ℓ_a, ℓ_b *y* ℓ_c *es tangente a la circunferencia* Γ.

Enunciados

1. *En la pizarra está escrito el número 2. Ana y Bruno juegan alternadamente, comenzando por Ana. Cada uno en su turno sustituye el número escrito por el que se obtiene al aplicar exactamente una de las siguientes operaciones: multiplicarlo por 2, o multiplicarlo por 3, o sumarle 1. El primero que obtenga un resultado mayor o igual a 2011 gana. Hallar cuál de los dos tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.*

2. *Encontrar todos los enteros positivos n para los cuales existen tres números enteros no nulos x, y, z tales que $x + y + z = 0$ y*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{n}.$$

3. *Sea ABC un triángulo y sean X, Y, Z los puntos de tangencia de su circunferencia inscrita con los lados BC, CA, AB respectivamente. Suponga que C_1, C_2, C_3 son circunferencias con cuerdas YZ, ZX, XY, respectivamente, tales que C_1 y C_2 se corten sobre la recta CZ y que C_1 y C_3 se corten sobre la recta BY. Suponga que C_1 corta a las cuerdas XY y ZX en J y M, respectivamente; que C_2 corta a las cuerdas YZ y XY en L e I, respectivamente; y que C_3 corta a las cuerdas YZ y ZX en K y N respectivamente. Demostrar que I, J, K, L, M, N están sobre una misma circunferencia.*

4. *Sea ABC un triángulo acutángulo, con $AC \neq BC$, y sea O su circuncentro. Sean P y Q puntos tales que $BOAP$ y $COPQ$ son paralelogramos. Demostrar que Q es el ortocentro de ABC.*

5. *Sean $x_1, \ldots, x_n$ números reales positivos. Demostrar que existen $a_1, \ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ tales que*

$$a_1x_1^2 + \cdots + a_nx_n^2 \geq (a_1x_1 + \cdots a_nx_n)^2.$$

6. *Sean k y n enteros positivos, con $k \geq 2$. En una línea recta se tienen kn piedras de k colores diferentes de tal forma que hay n piedras de cada color. Un* paso *consiste en intercambiar de posición dos piedras adyacentes. Encontrar el menor entero positivo m tal que siempre es posible lograr, con a lo sumo m pasos, que las n piedras de cada color queden seguidas si:*

a) *n es par.*

b) *n es impar y $k = 3$.*