

León, 14 de febrero de 2026

Problema 1.

Un número entero N se denomina *ofémico* si puede escribirse como $N = 2(m^2 + n^2)$ y también como $N = (m + n)^2 + 1$, para los mismos enteros m, n .

¿Cuáles son los dos enteros ofémicos más cercanos a 2026?

Problema 2.

Determina todos los enteros $d \geq 1$ con la siguiente propiedad: existen enteros positivos $a \neq b$ tales que $\text{mcd}(a, b) = d$ y $\frac{a^2 + b^2}{a + b}$ es entero.

Problema 3.

Sean ABC un triángulo escaleno y ω_1, ω_2 las dos circunferencias que pasan por A y son tangentes a la recta BC y a la circunferencia Γ que pasa por A, B, C . La recta BC es tangente a ω_1 en D_1 y a ω_2 en D_2 . Las rectas AD_1 y AD_2 cortan de nuevo a Γ en P_1 y P_2 , respectivamente. Prueba que P_1P_2 es perpendicular a BC .

Problema 4.

Sea $n \geq 3$ un entero. Ana juega moviendo n piedras entre los vértices de un n -ágono regular. Partiendo de cierta distribución inicial de las n piedras en los n vértices, Ana realiza una secuencia de jugadas del siguiente tipo: elegir un vértice con dos o más piedras y dispararlo, es decir, mover una piedra a cada uno de sus dos vértices contiguos. El juego termina si Ana consigue que cada vértice del polígono acabe con una piedra, en cuyo caso diremos que Ana ha ganado.

(a) Demuestra que para todo $n \geq 3$ existe una distribución inicial de las n piedras en los n vértices desde la cual Ana no puede ganar.

(b) Demuestra que, si Ana puede ganar desde la distribución inicial, entonces para toda secuencia ganadora existe algún vértice que nunca se ha disparado en dicha secuencia.

Solución Problema 1

Si un número entero N cumple $N = 2(m^2 + n^2) = (m + n)^2 + 1$, para la misma pareja de enteros (m, n) , entonces ha de verificarse necesariamente $2(m^2 + n^2) = (m + n)^2 + 1$, condición equivalente a:

$$2m^2 + 2n^2 = m^2 + 2mn + n^2 + 1 \Leftrightarrow m^2 - 2mn + n^2 = 1 \Leftrightarrow (m - n)^2 = 1,$$

es decir $m - n = 1$ o $m - n = -1$.

Supongamos $n = m + 1$ (el caso $m = n + 1$ es totalmente análogo). Entonces N es de la forma

$$N = (m + n)^2 + 1 = (2m + 1)^2 + 1 = 4m^2 + 4m + 2.$$

Nótese que cuando $m = 22$ se obtiene exactamente el valor 2026, por lo tanto 2026 es ofémico. Entre el anterior $(21 + 22)^2 + 1 = 1850$ y el siguiente $(23 + 24)^2 + 1 = 2210$, el más cercano a 2026 es 1850. La respuesta es 1850 y 2026.

Solución Problema 2

Motivación: en muchos problemas donde interviene el máximo común divisor, es una práctica habitual “intentar sacarlo de factor común” y trabajar con números coprimos o primos relativos (con máximo común divisor igual a 1).

En este problema comenzamos buscando, para un $d \geq 1$ genérico, enteros de la forma $a = pd, b = qd$ con $p \neq q$ y $\text{mcd}(p, q) = 1$. Esto garantiza que $a \neq b$ y $\text{mcd}(a, b) = d$. Veamos qué tiene que ocurrir para que $a^2 + b^2$ sea múltiplo de $a + b$.

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{d^2 p^2 + d^2 q^2}{dp + dq} = \frac{d(p^2 + q^2)}{p + q}.$$

Si conseguimos $d = p + q$, es seguro que la expresión anterior será un entero. Es decir, podemos intentar descomponer d como suma de dos elementos p, q distintos y coprimos.

Esto nos permite dar una respuesta afirmativa para todo $d \geq 3$, eligiendo por ejemplo $p = 1, q = d - 1$. En efecto, si definimos $a = d, b = d(d - 1)$, está claro que a, b son positivos y distintos (pues $d \geq 3$), y además:

$$\begin{aligned} \text{mcd}(a, b) &= \text{mcd}(d, d(d - 1)) = d \cdot \text{mcd}(1, d - 1) = d \cdot 1 = d, \\ \frac{a^2 + b^2}{a + b} &= \frac{d^2 + d^2(d - 1)^2}{d + d(d - 1)} = \frac{d^2(1 + (d - 1)^2)}{d^2} = 1 + (d - 1)^2, \quad \text{entero.} \end{aligned}$$

El procedimiento anterior no sirve para $d = 2$, pero podemos resolver este caso por tanteo: la combinación $a = 2, b = 6$ cumple las condiciones pedidas, ya que $\text{mcd}(2, 6) = 2$ y $\frac{2^2 + 6^2}{2 + 6} = 5$. Es decir, $d = 2$ cumple la propiedad del enunciado.

Falta estudiar el caso $d = 1$. Veamos que $d = 1$ no cumple la propiedad buscada, es decir, no existen enteros a, b positivos y distintos con $\text{mcd}(a, b) = 1$ y tal que $a^2 + b^2$ sea múltiplo de $a + b$.

Nótese que $a^2 + b^2 = a^2 - b^2 + 2b^2 = (a - b)(a + b) + 2b^2$. Si $a + b$ fuera un divisor de $a^2 + b^2$, también sería un divisor de $2b^2$. Pero $\text{mcd}(a, b) = 1$ implica $\text{mcd}(a + b, b) = 1$, por lo que tendríamos la siguiente situación: $a + b$ divide al producto de $2 \cdot b \cdot b$ pero no tiene factores en común con b , por lo tanto $a + b$ es un divisor de 2. Pero al ser a, b positivos, esto solamente es posible si $a = b = 1$, y no se cumple $a \neq b$.

Por todo lo anterior, se concluye que todos los enteros $d \geq 2$ cumplen la propiedad del enunciado, y $d = 1$ no la cumple.

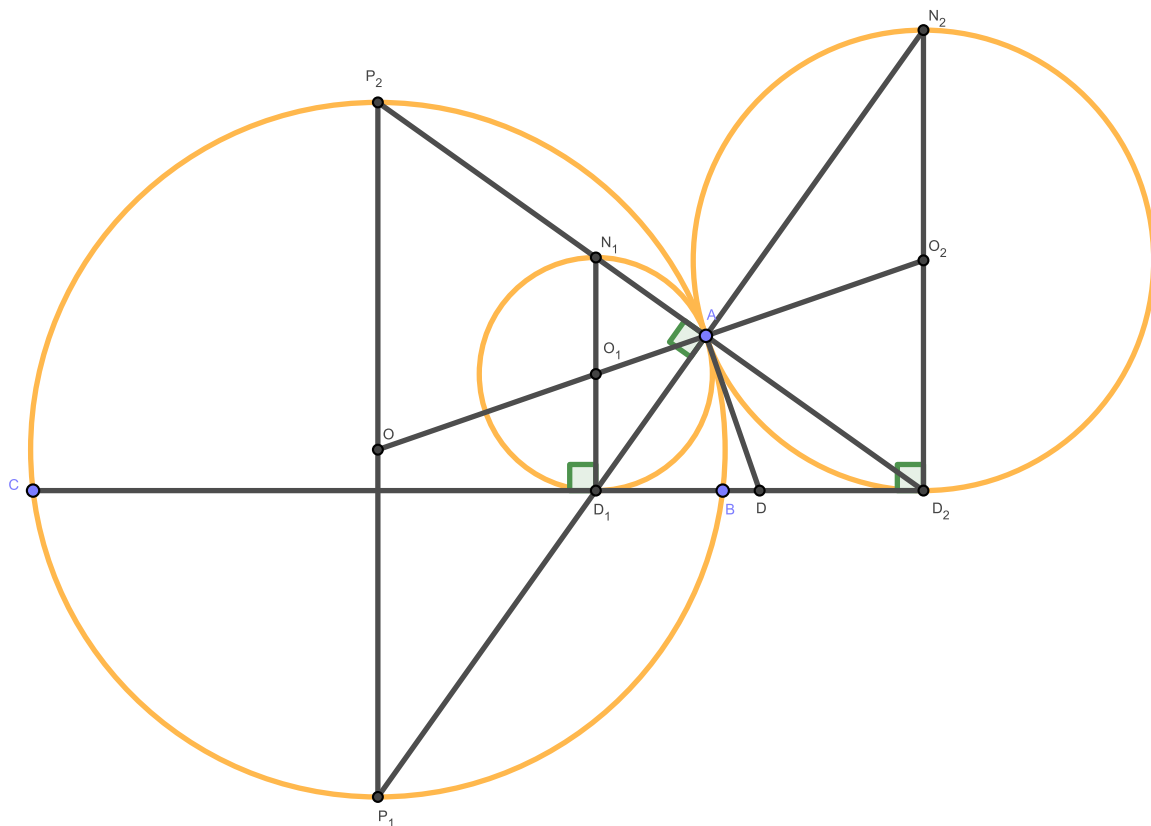
Ideas para otras soluciones.

- Conquistas condicionadas: si d cumple la propiedad del enunciado, también la cumple cualquier múltiplo de d , por ejemplo kd . En efecto, supongamos que a, b, d son tales que $\frac{a^2 + b^2}{a + b} = t$ entero, con $a \neq b$ y $\text{mcd}(a, b) = d$. Entonces definimos $a' = ka, b' = kb$ y se tiene:

$$\begin{cases} a' \neq b' \text{ por ser } a \neq b \\ \text{mcd}(a', b') = \text{mcd}(ka, kb) = k \cdot \text{mcd}(a, b) = kd \\ \frac{a'^2 + b'^2}{a' + b'} = \frac{k^2(a^2 + b^2)}{k(a + b)} = kt, \text{ entero.} \end{cases}$$

A partir de esta idea puede entenderse la importancia de tratar aparte el caso $d = 1$, ya que en si el 1 cumple la propiedad pedida, también la cumplirá todo $d \geq 1$.

Solución Problema 3

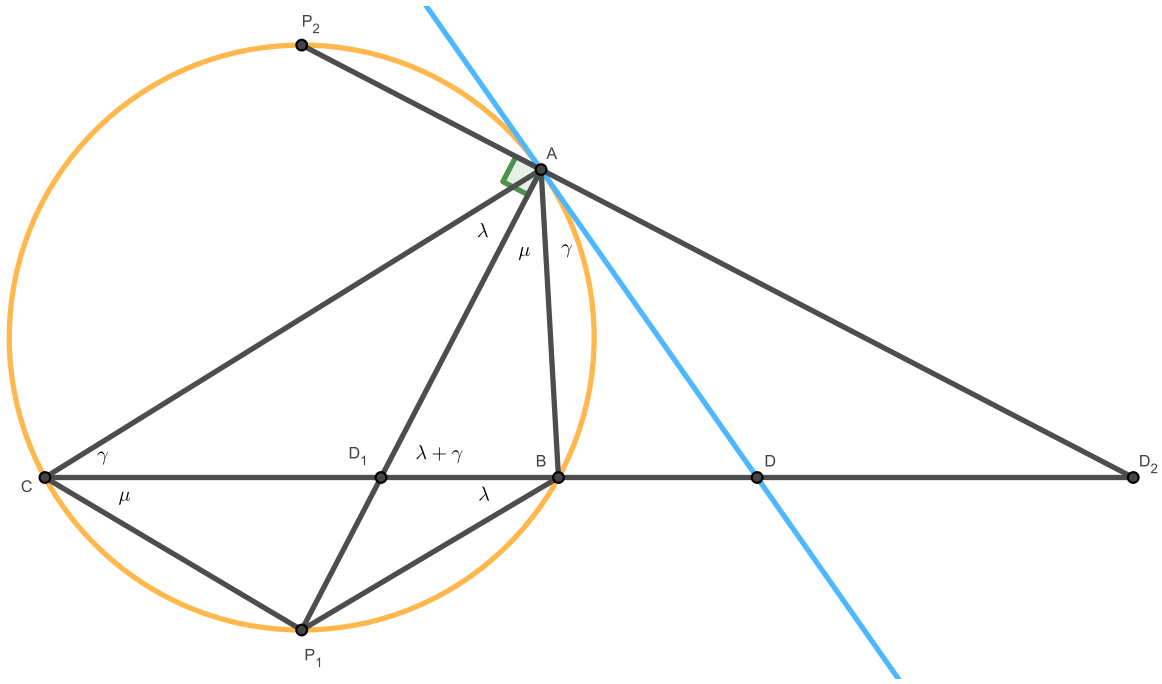


Solución 1. Motivación: ¿cómo aprovechar las condiciones de tangencia en el punto A ? Como mínimo, dibujando la figura y trazando la tangente común por A a los tres círculos. Aquí se ha supuesto que ω_1 es interior a Γ , y ω_2 es exterior, el razonamiento no varía si se intercambian los nombres de ω_1, ω_2 .

Dado que el triángulo ABC es escaleno, la tangente en A a su circunferencia circunscrita Γ no es paralela a la recta BC , y podemos definir D como el punto de intersección de esas dos rectas. Por simetría de los segmentos tangentes desde D a ω_1 tenemos que $DA = DD_1$, y de forma análoga razonando con las tangentes desde D a ω_2 se tiene $DA = DD_2$. En particular, D es el circuncentro del triángulo AD_1D_2 , que necesariamente debe ser rectángulo en A , pues su circuncentro pertenece al lado opuesto a A . En particular, los puntos P_1, P_2 del enunciado formarán un diámetro de Γ , ya que $\angle P_1AP_2 = 90^\circ$ (“arco capaz” de 90°). A partir de aquí visualizamos el final del problema. ¿Cuál es el diámetro de Γ que es perpendicular a BC ? El que pasa por los puntos de intersección de Γ con la mediatriz de BC , que son también los puntos por donde pasan las bisectrices interior y exterior del ángulo $\angle BAC$. En otra solución veremos esta idea.

Sean O, O_1 , y O_2 los centros de Γ, ω_1 y ω_2 , respectivamente. Las condiciones de tangencia en A aseguran que O, O_1, O_2 están en una recta que pasa por A y es perpendicular a AD . Además, suponemos que D_1N_1 es un diámetro de ω_1 , en particular $\angle D_1AN_1 = 90^\circ$, y N_1 pertenece a la recta AD_2 . Análogamente, si D_2N_2 es un diámetro de ω_2 , entonces N_2 pertenece a la recta AD_1 . Finalmente, los triángulos AO_1D_1 y AOP_1 , que son isósceles con $O_1A = O_1D_1$ y $OA = OP_1$, resultan ser semejantes por tener un ángulo común en A , esto significa que las rectas O_1D_1 y OP_1 son paralelas, es decir, perpendiculares a BC , y hemos terminado.

Nota: el último párrafo puede sustituirse por un razonamiento utilizando una homotecia de centro A que lleva Γ en ω_1 , y otra homotecia de centro A que lleva Γ en ω_2 , y observando que las homotecias transforman rectas tangentes en rectas tangentes paralelas.



Solución 2. Utilizando propiedades básicas de los ángulos inscritos y semiinscritos en una circunferencia.

Sea D como en la solución anterior, ya sabemos que se cumple $DD_1 = DA = DD_2$ y también $\angle D_1AD_2 = 90^\circ$. Esto permite reconstruir D_1, D_2 por el siguiente procedimiento sencillo: trazar la tangente en A a la circunferencia Γ , que corta a la recta BC en D , y entonces la circunferencia de centro D que pasa por A corta a BC en los puntos D_1, D_2 .

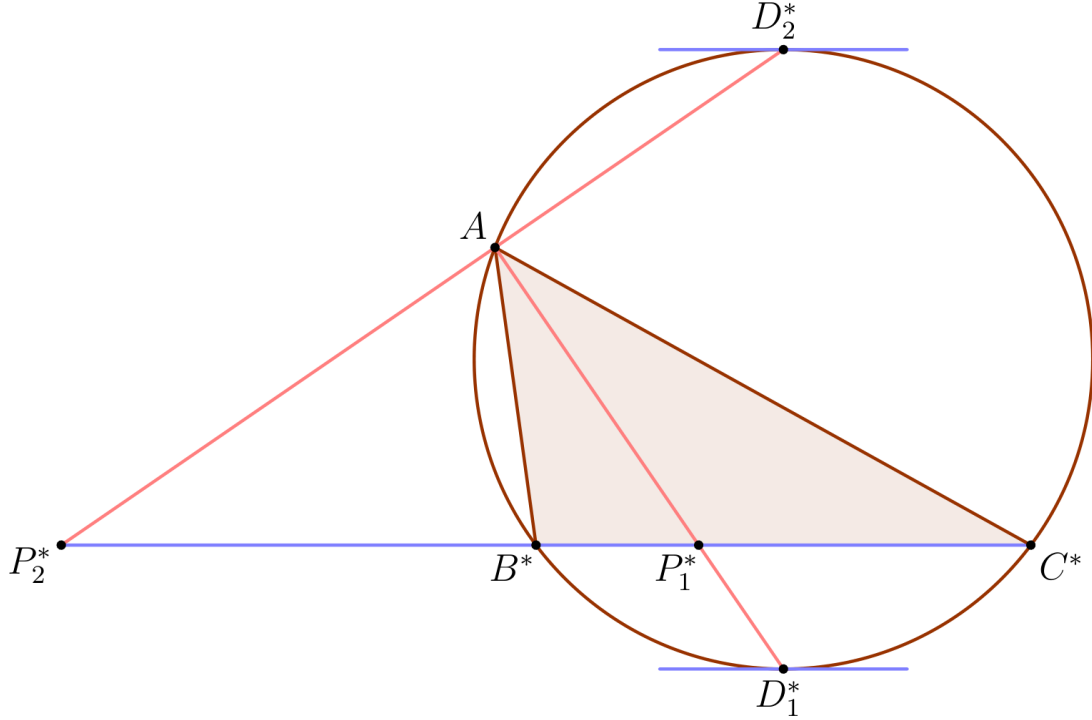
Si llamamos $\gamma = \angle BAC$, se tiene $\angle BAD = \gamma$ (ángulo semiinscrito), y si llamamos $\lambda = \angle CAD_1$ y $\mu = \angle D_1AB$, entonces razonando con ángulos inscritos tenemos que $\angle CBP_1 = \lambda$ y $\angle P_1CB = \mu$.

Además, se verifica $\angle BD_1A = \lambda + \gamma$ (ángulo externo en el triángulo ACD_1). Ahora bien, en el triángulo DAD_1 , a los lados iguales $DA = DD_1$ se oponen ángulos iguales $\lambda + \gamma = \mu + \gamma$, de donde se obtiene $\lambda = \mu$. Por consiguiente, el triángulo BCP_1 es isósceles con $P_1B = P_1C$. La solución se completa utilizando que $\angle P_1AP_2 = 90^\circ$, por lo que P_1P_2 es un diámetro de Γ , que pasa por el centro O . Entonces la recta P_1P_2 es la mediatriz de BC pues contiene a dos de sus puntos P_1 y O , y se concluye que P_1P_2 y BC son perpendiculares.

Solución 3 (Ángel Ibáñez Gutiérrez).

Invertimos respecto de A (con cualquier radio).

La recta BC se invierte a una circunferencia (AB^*C^*) . Los puntos D_1 y D_2 se invierten a puntos D_1^* y D_2^* en (AB^*C^*) tales que las rectas tangentes a (AB^*C^*) por D_1^* y por D_2^* sean ambas paralelas a la recta B^*C^* (la inversión de la condición de tangencia del enunciado). Finalmente, P_1^* y P_2^* son las intersecciones de B^*C^* con AD_1^* y AD_2^* respectivamente. El diagrama invertido queda así:



Llamando O al centro de (AB^*C^*) , como las tangentes a dicha circunferencia por D_1^* y por D_2^* son perpendiculares a D_1^*O y a D_2^*O , respectivamente, y además ambas rectas tangentes son paralelas a B^*C^* , se obtiene que D_1^*O y D_2^*O son ambas perpendiculares a B^*C^* , así que tienen que ser la misma recta (no pueden ser paralelas porque comparten el punto O).

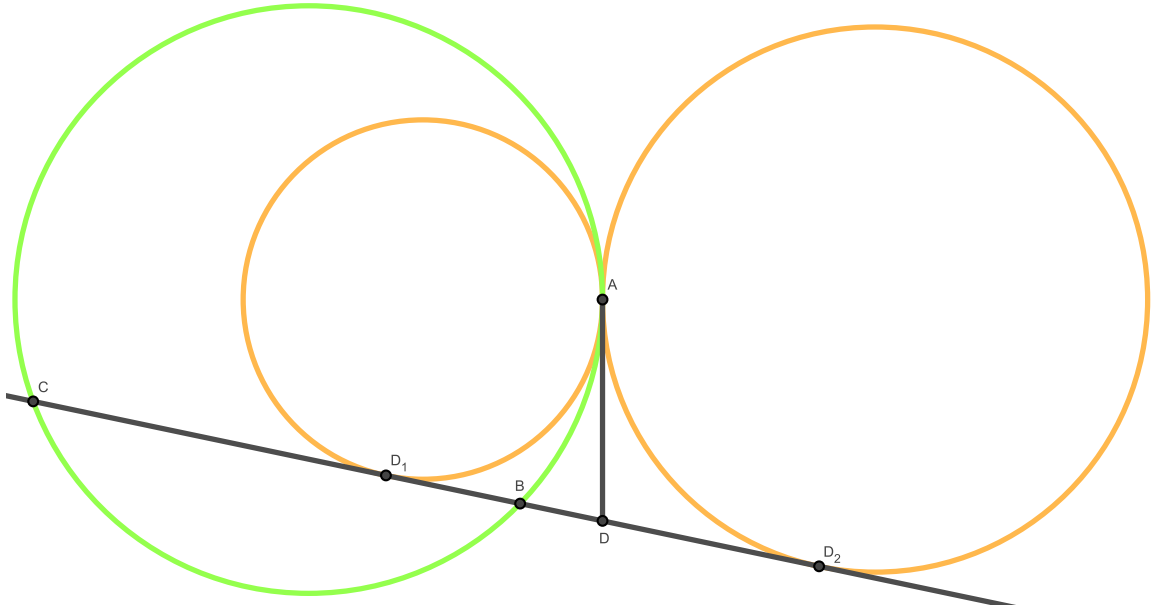
De esto se deduce que $D_1^*D_2^*$ es el diámetro de (AB^*C^*) perpendicular a B^*C^* , es decir, la mediatriz de ese segmento.

Por tanto, D_1^* y D_2^* son los puntos medios de los dos arcos entre B^* y C^* en (AB^*C^*) . Entonces es bien conocido (por la configuración del lema del incentro-excentro) que AD_1^* y AD_2^* son las bisectrices interior y exterior de $\angle B^*AC^*$.

Como los puntos inversos están alineados con el centro de la inversión, A , obtenemos que AD_1 , AD_2 son las bisectrices interior y exterior de $\angle BAC$. Por la configuración usada anteriormente se sabe que las bisectrices cortan a la circunferencia circunscrita (ABC) en los puntos medios de los dos arcos entre B y C : P_1P_2 es la mediatriz de BC y en particular es perpendicular a ella, como queríamos.

Solución 4. Si además de permitirnos el uso de inversiones utilizamos cuaternas armónicas, la solución puede simplificarse más.

Como en la primera solución, se tiene que $DD_1 = DA = DD_2$, por lo que AD_1D_2 es rectángulo en A con circuncentro D . Por potencia desde D a Γ tenemos que $DB \cdot DC = DA^2$, luego B, C son inversos en la circunferencia de diámetro D_1D_2 , y es conocido que en esta situación se tiene una cuaterna armónica $[D_1, D_2, B, C] = -1$, y otra cuaterna $[B, C, D_1, D_2] = -1$. Como además $\angle D_1AD_2 = 90^\circ$, A está en la circunferencia de Apolonio de base BC y cierta razón $k = \frac{AB}{AC} = \frac{D_1B}{D_1C} = \frac{D_2B}{D_2C}$. Por el teorema de la bisectriz (recíproco), se deduce que AD_1 y AD_2 son las bisectrices interior y exterior del ángulo $\angle BAC$, y es conocido que estas dos rectas cortan a la circunferencia circunscrita de ABC en dos puntos de la mediatriz de BC , recta perpendicular a BC .



Solución Problema 4

(a) Solución 1 (Andrés Sáez Schwedt). Es posible ver que partiendo de 2 piedras en un vértice, 0 piedras en un vértice contiguo y 1 piedra en cada uno de los restantes vértices, se tiene una configuración en la cual Ana no puede ganar. En efecto, si formamos la secuencia $(a_1, \dots, a_n)$, donde a_i denota el número de piedras en el vértice i ($i = 1, 2, \dots, n$), entonces una configuración inicial como la descrita podría codificarse como $(0, 2, 1, \dots, 1)$. La única jugada válida que tiene Ana es disparar el segundo vértice, lo que da lugar a la secuencia $(1, 0, 2, 1, \dots, 1)$, equivalente a la anterior en cualquier numeración circular de los vértices. Así, Ana entra en un bucle infinito, en todo momento la única jugada posible es forzada y deja un vértice sin piedras y otro vértice con 2 piedras, sin alcanzar nunca el objetivo.

- (a) Solución 2. Demostramos que Ana no puede ganar en la distribución inicial con 1 piedra en un vértice y $n - 1$ en uno de sus vecinos. Lo hacemos con un invariante modular.

Numeramos los vértices con índices $1, 2, \dots, n$ en sentido horario; dada una distribución de piedras, sea a_i el número de piedras en el vértice i . Definimos la *especie* E de la distribución como la clase de congruencia módulo n de la suma

$$E \equiv 1a_1 + 2a_2 + \dots + na_n \pmod{n}.$$

Afirmación — La especie de una distribución de n piedras se preserva al rotar los índices de los vértices.

Demostración. Tras una rotación, cada índice nuevo es congruente (módulo n) con el anterior más una constante d . Por tanto, si antes de rotar hay a_i piedras en el vértice de índice i y la especie es

$$E \equiv 1a_1 + 2a_2 + \dots + na_n \pmod{n},$$

entonces la especie con los índices rotados será

$$\begin{aligned} E' &\equiv (1+d)a_1 + (2+d)a_2 + \dots + (n+d)a_n \\ &\equiv (1a_1 + 2a_2 + \dots + na_n) + d(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \\ &\equiv E + dn \equiv E \pmod{n}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$ es el total de piedras. $\square$

Afirmación — La especie es un invariante de la secuencia de jugadas de Ana.

Demostración. Hay que demostrar que la especie antes y después de una jugada es la misma.

Sea E la especie de la distribución antes de la jugada y E' la especie después de ella. Por la Afirmación anterior, sin pérdida de generalidad podemos elegir los índices de modo que el vértice de índice n sea el que se dispara en la jugada. Entonces la diferencia entre las especies es

$$\begin{aligned} E' - E &\equiv n(-2) + (n-1)(1) + (n+1)(1) \\ &\equiv 0 - 1 + 1 \equiv 0 \pmod{n}, \end{aligned}$$

luego $E \equiv E' \pmod{n}$, como queríamos. $\square$

La distribución tras la victoria de Ana tiene como especie la clase de congruencia módulo n de

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Basta con encontrar una distribución inicial de especie no congruente con el valor anterior.

Numeramos los vértices desde 1 hasta n en sentido horario. Proponemos la distribución con $n - 1$ piedras en el vértice n y 1 piedra en el vértice 1. Su especie es

$$n(n-1) + 1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod{n},$$

que en ningún caso es congruente con $\frac{n(n+1)}{2}$:

- Si n es impar, $\frac{n(n+1)}{2} \equiv 0 \not\equiv 1 \pmod{n}$ por ser $n > 1$.
- Si n es par, poniendo $n = 2k$ se tiene $\frac{n(n+1)}{2} \equiv k \not\equiv 1 \pmod{n}$, pues $1 < k < n$ por ser $n > 2$.

Concluimos que Ana no puede ganar desde esta distribución inicial.

- (b) Solución. Procedemos por contradicción suponiendo que todos los vértices se han disparado al menos una vez en la secuencia ganadora. Sea V el vértice que más jugadas llevaba sin dispararse al acabar la secuencia. Entonces los dos vecinos de V se han disparado desde el último disparo de V . En esos disparos de sus vecinos, V ha recibido dos piedras, que ha mantenido hasta el final de la secuencia. Por tanto, en la distribución final, V no puede tener solo una piedra, lo que contradice que Ana haya ganado con esa secuencia, como queríamos.

Nota. Para n par sirve el invariante de paridad natural (pintando los vértices alternadamente de blanco y de negro, la paridad del número de piedras en vértices blancos se preserva, y lo mismo con los negros).

Para n impar no creo que baste con usar solo cuestiones de paridad, pues para valores pequeños de n parece que siempre se puede ganar en el análogo del juego donde los números de piedras se toman módulo 2 (que es equivalente a tener una luz y un interruptor en cada vértice tal que cada interruptor cambia las luces de los vecinos y queremos encender todas las luces, siendo el estado inicial un número impar de luces encendidas).

Otra estrategia para el apartado (a) podría ser intentar usar el apartado (b): si se encuentra una distribución para la cual se pueda asegurar que toda candidata a secuencia ganadora debería disparar todos los vértices, entonces se sabe que no existe una secuencia ganadora. Probablemente exista una demostración así, pero no parece que pueda ser más simple que la del invariante.