

Las Rozas 2025

II Olimpiada Femenina Española de Matemáticas

Las Rozas de Madrid, 8 de marzo de 2025

Problema 1.

Alba escribe un entero positivo a . A continuación, Nuria elige un entero positivo n . Luego Nuria calcula la suma S de todos los números comprendidos entre n y $n + a - 1$, ambos incluidos. Si S es par, Nuria gana. ¿Para qué valores de a puede Nuria elegir algún número que le asegure ganar?

(Recuerda: tienes que demostrar que Nuria gana con los valores que indicas, y que pierde con cualquier otro).

Problema 2.

Sean a, b enteros positivos. Consideremos la sucesión $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2025}$, con $a_1 = a, a_2 = b$ y para $n \geq 1$,

$$a_{2n+1} = a_{2n} \cdot a_{2n-1}, \quad a_{2n+2} = a_{2n+1} + 4$$

¿Cuál es la mayor cantidad de cuadrados perfectos que puede haber entre estos 2025 números?

Problema 3.

a) Agrupamos los diez vértices de un decágono regular en cinco parejas, de manera que cada vértice forma parte de una de ellas, y ninguno forma parte de más de una.

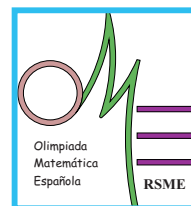
Cada pareja determina un segmento, que puede ser lado o diagonal del decágono. ¿Es posible elegir esas parejas de forma que los cinco segmentos que determinan sean de distinta longitud?

b) Con los vértices de un polígono regular de 100 lados formamos 50 parejas, cada una de las cuáles determina un segmento. ¿Es posible elegir las parejas de modo que todos los segmentos tengan longitudes distintas?

Problema 4.

El triángulo ABC es acutángulo. Sean D, E y F los puntos medios de los lados BC, AC y AB respectivamente. El punto X en el lado AB es tal que DX es perpendicular a AB , y el punto Y en el lado AC es tal que DY es perpendicular a AC . La paralela a XY por F corta a la recta DY en P .

Demostrar que los ángulos $\angle ADX$ y $\angle DEP$ son suplementarios.



Las Rozas 2025

II Olimpiada Femenina Española de Matemáticas

Las Rozas de Madrid, 8 de marzo de 2025

Problema 1.

Alba escribe un entero positivo a . A continuación, Nuria elige un entero positivo n . Luego Nuria calcula la suma S de todos los números comprendidos entre n y $n + a - 1$, ambos incluidos. Si S es par, Nuria gana. ¿Para qué valores de a puede Nuria elegir algún número que le asegure ganar?

(Recuerda: tienes que demostrar que Nuria gana con los valores que indicas, y que pierde con cualquier otro)

Solución 1. Vemos que Nuria gana si y solo si a no es del tipo $4k + 2$.

Es fácil darse cuenta de que a representa la cantidad de sumandos en la suma S , siendo n el menor de ellos.

Si $a = 4k$, podemos proceder agrupando los $4k$ sumandos de la suma S en k bloques, cada uno con la suma de 4 enteros consecutivos. Cada una de estas sumas es entonces par, de modo que S lo será también, y por tanto Nuria gana, cualquiera que sea la elección que haga de su número n

Si a no es múltiplo de 4, $a = 4k + r$, con $r = 1, 2$ o 3 . Barriando posibilidades,

a) Si $a = 4k + 1$, tendremos

$$S = n + (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + 4k) = [n + (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + 4k)] = n + S'$$

Como S' puede descomponerse en bloques de sumandos de 4 enteros consecutivos, S' siempre es par, de modo que Nuria puede ganar eligiendo un entero n par.

b) Si $a = 4k + 2$, podemos considerar en la suma S por una parte los dos primeros sumandos n y $n + 1$ que suman $2n + 1$, que es impar, y agrupar los $4k$ restantes en bloques de cuatro enteros consecutivos, que tendrán suma par. Por lo tanto S será siempre impar, independientemente de cuál haya sido la elección de n . Nuria pierde con cualquier elección de n .

c) Por último, si $a = 4k + 3$, procediendo como en el apartado anterior, vemos que la paridad de S depende solamente de la paridad de la suma de los tres sumandos más pequeños (que es $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3$), pues la suma de los restantes sumandos será seguro par; Nuria ganará eligiendo n impar, que hace que $3n + 3$ sea par.

Solución 2. Escribimos $S = n + (n + 1) + \dots + (n + a - 1) = \frac{a(2n + a - 1)}{2}$, pues es una progresión aritmética

a) Si $a = 4k$ evidentemente $S = 2k(2n + 4k - 1)$ es siempre par.

b) Si a es impar escribimos $a = 2r + 1$, con lo que $S = (2r + 1)(n + r)$. La suma S será par si Nuria elige n con la misma paridad que r , para que $n + r$ sea par.

c) Si a es par pero no es múltiplo de 4, es decir si $a = 4k + 2$, tendremos $S = (2k + 1)(2a + 4k + 1)$, que siempre es impar, y Nuria no puede ganar con ninguna elección de n .

Problema 2. Sean a, b enteros positivos. Consideremos la sucesión $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2025}$, con $a_1 = a, a_2 = b$ y para $n \geq 1$,

$$a_{2n+1} = a_{2n} \cdot a_{2n-1}, \quad a_{2n+2} = a_{2n+1} + 4$$

¿Cuál es la mayor cantidad de cuadrados perfectos que puede haber entre estos 2025 números?

Solución 1 Es natural empezar jugando con valores pequeños de a, b , para entender cómo se construyen los términos de la sucesión. Por ejemplo, para $a = b = 1$ tendremos

$$1, 1, 1, 5, 5, 9, 45, 49, 45 \cdot 49 = 2205, 2209 (= 47^2), \dots$$

Para $a = 1$ y $b = 2$, los primeros términos de la sucesión son

$$1, 2, 2, 6, 12, 16, 192, 196 = 14^2, \dots$$

Estos ejemplos sugieren ver qué ocurre en los términos pares. Demostraremos por inducción que, independientemente de los valores de a y b , a partir del sexto término los que ocupan lugar par son todos cuadrados perfectos. Es decir, veremos que para $n \geq 3$, a_{2n} es un cuadrado.

Llamamos $c = a_3 = ab$. Entonces $a_4 = c + 4, a_5 = c(c + 4) = c^2 + 4c$ y $a_6 = c^2 + 4c + 4 = (c + 2)^2$. Este sería el caso base.

Para $n \geq 3$, supongamos $a_{2n} = d^2$. Entonces $a_{2n-1} = d^2 - 4$ y $a_{2n+1} = d^2(d^2 - 4)$, de modo que el siguiente término en lugar par es $a_{2n+2} = d^2(d^2 - 4) + 4 = d^4 - 4d^2 + 4 = (d^2 - 2)^2$. Concluye así la demostración por inducción.

Por otra parte, del término quinto en adelante, ningún término en lugar impar puede ser un cuadrado, ya que la diferencia entre cuadrados perfectos de enteros positivos en ningún caso es igual a 4. Por tanto, desde el sexto término hasta el último hay siempre 1010 cuadrados perfectos.

Los cuatro primeros términos de la sucesión son $a, b, ab, ab + 4$. Entre estos, el máximo número de cuadrados posible es 3, ya que ab y $ab + 4$ no pueden ser ambos cuadrados.

Resulta entonces que el máximo número de cuadrados perfectos que puede haber entre los 2025 términos de la sucesión, $a_1, a_2, \dots, a_{2025}$, es $1010 + 3 = 1013$.

Solución 2. Observemos que si para algún $n \geq 2$ los términos a_{2n} y $a_{2n+1} = a_{2n} \cdot a_{2n-1}$ fueran ambos cuadrados, también lo sería a_{2n-1} . Pero en este caso tendríamos $a_{2n} - a_{2n-1} = r^2 - s^2 = 4$, lo que implica $a_{2n-1} = 0$, contradicción. Es decir, no puede haber en la sucesión dos términos consecutivos que sean cuadrados salvo si lo son a_1 y a_2 , en cuyo caso tal vez lo sería también a_3 . Se concluye demostrando, como en la solución anterior, que a partir de ahí los términos en lugar par son cuadrados.

Problema 3.

a) Agrupamos los diez vértices de un decágono regular en cinco parejas. Cada vértice forma parte de una de ellas, y ninguno forma parte de más de una.

Cada pareja determina un segmento, lado o diagonal del decágono. ¿Es posible elegir esas parejas de forma que los cinco segmentos que determinan sean de distinta longitud?

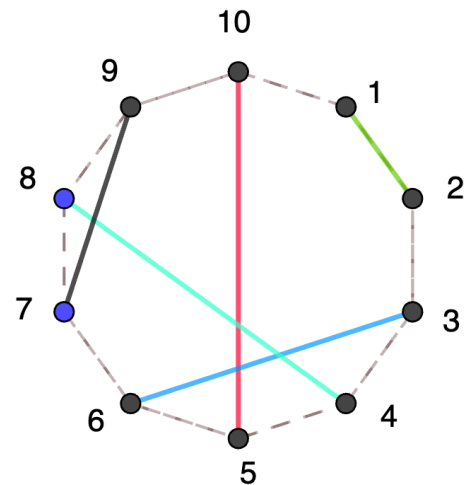
b) Con los vértices de un polígono regular de 100 lados formamos 50 parejas, cada una de las cuáles determina un segmento. ¿Es posible elegir las parejas de modo que todos los segmentos tengan longitudes distintas?

Solución. a) Sí que es posible: véase la figura. Segmentos que abarcan distinto número de lados del polígono regular son cuerdas de su circunferencia circunscrita de distinta longitud. En el caso del decágono, esas cuerdas abarcarían un lado, 2, 3, 4 o 5.

Numerados los vértices desde 1 hasta 5, las parejas formadas son $\{1, 2\}$, $\{7, 9\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 8\}$, $\{10, 5\}$, que abarcan respectivamente 1, 2, 3, 4 y 5 lados.

b) Con 100 vértices no es posible.

En este caso, hay 50 posibles longitudes dependiendo del número de lados que la cuerda correspondiente abarque, que va de 1 hasta 50.



Numerados los vértices como en el apartado anterior, tenemos 50 vértices pares y 50 impares. Coloreemos los pares de rojo y los impares de azul. Como los 50 segmentos determinados son de distinta longitud no puede haber repeticiones, ya que hay 50 longitudes posibles. Entre estas, 25 segmentos abarcan un número impar 1, 3, 5, $\dots$ 49 de lados, y los 25 restantes un número par.

Para conseguir los primeros segmentos debemos usar vértices de distinto color, y estaríamos consumiendo 25 vértices rojos y 25 azules. Pero entonces no podríamos conseguir los restantes 25 segmentos, pues cada uno de estos se forma con una pareja de vértices del mismo color, así que necesitaríamos un número par de vértices de cada uno. Pero ¡solamente nos quedan 25 de cada tipo! Es por tanto imposible obtener 50 longitudes diferentes.

Problema 4.

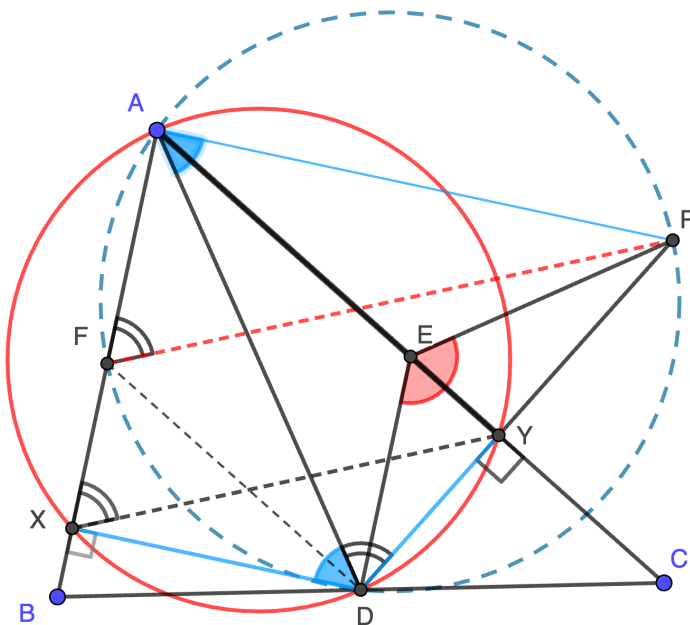
El triángulo ABC es acutángulo. Sean D, E y F los puntos medios de los lados BC , AC y AB respectivamente. El punto X en el lado AB es tal que DX es perpendicular a AB y el punto Y en el lado AC es tal que DY es perpendicular a AC . La paralela a XY por F corta a la recta DY en P .

Demostrar que $\angle ADX$ y $\angle DEP$ son suplementarios.

Solución. Llamamos $\alpha = \angle ADX$. Demostraremos que $\angle DAP = \alpha$, y que E es el ortocentro del triángulo ADP . De ahí se sigue inmediatamente el resultado.

Como $DX \perp XA$ y $DY \perp YD$, el cuadrilátero $AXDY$ es cíclico; la circunferencia que lo circunscribe, Γ , tiene diámetro AD .

$\angle AXY = \angle ADY$, pues ambos están inscritos en Γ y abarcan la cuerda AY ; además puesto que $XY \parallel FP \Rightarrow \angle AFP = \angle AXY$.



Como $\angle ADY = \angle ADP$, resulta entonces que desde los puntos F y D vemos el segmento AP bajo un mismo ángulo: el cuadrilátero $AFDP$ es cíclico, inscrito en la circunferencia Ω .

Como $DY \perp AC$ el ángulo $\angle AYP$ es recto, y al ser $FD \parallel AC$ (pues F y D son puntos medios de los lados), también $FD \perp DP$ y $\angle FDP$ también es recto, inscrito en Ω : se sigue entonces que el segmento FP es diámetro, y por tanto, $\angle FAP$ es recto, pues abarca un diámetro, y $AB \perp AP$.

Como también $DX \perp AB$, resulta que $DX \parallel AP$, y

$$\alpha = \angle DAP$$

En el triángulo DAP , el segmento AY es la altura correspondiente al vértice A . Como el cuadrilátero $AFDE$ es un paralelogramo, y $FA \perp AP$, también $DE \perp AP$, con lo que DE determina la altura por D , y el punto E es el ortocentro del triángulo DAP .

La recta PE será una altura; llamemos P' al punto en que corta al lado AD . Análogamente, sea D' el punto en el que la altura DE corta al lado AP . El cuadrilátero $AP'ED'$ es cíclico, pues un par de ángulos opuestos son rectos; entonces $\angle P'AD' + \angle P'ED' = 180^\circ$. Como $\angle P'AD' = \angle DAP = \alpha$ y $\angle DEP = \angle D'EP'$, resulta que $\angle DEP = 180 - \alpha$ y en efecto $\angle ADX$ y $\angle DEP$ son suplementarios.

